СПРАВКА ЗА ПРИНОСИТЕ В ДИСЕРТАЦИЯТА И ПУБЛИКАЦИИТЕ;

Цветелин Заевски
ИНСТИТУТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА
БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ

Съдържание

1 Обобщение на научните приноси

В тази дисертация разработваме нов подход за оценка на финансови инструменти от американски вид, издадени върху базов актив, моделиран чрез лог-нормален процес. Тяхна основна характеристика е правото на ранно упражняване, което притежателят може да използва по всяко време преди падежа. Така уравнението на Блек-Шоулс се превръща в ЧДУ със свободна граница. Традиционният подход за изследване на тези задачи се основава на система от интегрални уравнения, чието числено решаване изисква относително много изчислително време. Като алтернатива, подходът, който предлагаме, се основава на някои свойства на първото достигане до ниво на брауновото движение. Нека означим със ζ първото достигане до линейна функция или изхода от такава ивица. Нека T е крайна дата и θ, σ и k са константи. Интересуваме се от очакванията $\mathbb{E}\left[e^{-\theta\zeta} I_{\zeta<T}\right]$ и $\mathbb{E}\left[e^{\sigma B_T} I_{\ zeta \geq T}\right]$. Желаните резултати са доказани в глава 2. Освен това в тази глава разглеждаме някои важни граници от вида $\lim_{T\to\infty} e^{kT}\mathbb{E}\left[e^{\theta B_T} I_{T<\zeta}\right]$. В допълнение, получаваме необходимите резултати за границата $\lim_{T\to\infty} e^{kT}\mathbb{E}\left[e^{\theta B_T} I_{T<\zeta, B_T>z(T)}\right]$, където $z(t)$ е друга линейна функция.

Използвайки тези резултати за Марковсите моменти на Брауновото движение, апроксимирам оптималните граници чрез максимизиране на финансовата полза на притежателя на дериватива. По този начин преобразуваме задачата със свободни граници в ЧДУ в известна област. Има много числени методи за тяхното решаване. Ние предлагаме един сравнително бърз Монте Карло алгоритъм за изчисление на очакването (3.2), което задава цената. Като алтернатива, адаптираме няколко схеми с крайни разлики към възникващото ЧДУ (3.3). Оказва се, че методът на Кранк-Николсън е относително по-бърз и по-точен в сравнение с останалите. Ако финансовите договори нямат дата на падеж, то оптималните граници са фиксирани по времето поради Марковското свойството на стохастичните процеси, които управляват базовите активи. Това ни позволява да изведем затворени формули за границите както и за справедливата цена на дериватива, използвайки метода за максимизиране на финансовия резултат на притежателя. Този подход е приложен към традиционните американски опции в глава 4. Тяхната модификация, наречена ограничени (capped) опции, се изучава в глава 5. Тяханат основната характеристика, е нивото над което кол опция не може да бъде упражнена (под което за пут). Извели сме някои затворени и полузатворени формули за цените.

Глава 6 разглежда някои финансови инструменти с обобщена платежна функция – основното ограничение, което налагаме, е двойна диференцируемост. Получаваме някои достатъчни условия, които превръщат оценяването на такива деривативи в едностранни задачи за първо достигане. Методът се основава на инфинитезималните генератори. Грубо казано, условието е изпълнено, ако този диференциален оператор, приложен към платежната функция, разделя пространството на състоянията на две свързани подмножества – първото съдържа положителните стойности, докато другото се състои от отрицателните. Ако достигането е от долу, то деривативът се асоциира с пут опциите. Напротив, ако е от горе, то имаме кол-вид договор. Нашият метод се прилага към тези деривативи, като се обръща специално внимание на степенни платежни функции. Въпреки че се разглеждат диференцируеми платежни структури, представеният метод може да се приложи и към традиционните опции, чиито платежни функции са недиференцируеми в страйка – $(x-K)^+$ или $(K-x)^+$. Това се постига чрез апроксимиране от двукратно диференцируеми функции.

В глава 7 разглеждаме така наречените стренгъл стратегии. Те се вяват като комбинация между кол и пут опции – платежната им функция е $\max\left\{C_1(x-K_1), C_2(K_2-x)\right\}$. Традиционното допускане е, че пут страйкът е по-малък от кол страйкът, $K_1 \le K_2$. Нашият подход позволява да изоставим това ограничение. В допълнение, разглеждаме различни пут и кол тегла чрез броя на дяловете C_1 и C_2. Оказва се, че пространството на състоянията може да бъде разделено на три свързани подмножества. Ако цената на актива е в най-долното, то е оптимално притежателят да упражни като пут. Горното съдържа точките, които правят упражняването като кол оптимално. Средното подмножество прави запазването на опциятаза предпочитане. Така възниква двустранна задача за изход от ивица. Получени са формули ако няма матуритетни ограничения. Важно е да се спомене, че ако основният актив не изплаща дивиденти (еквивалентно на модел без допълнително дисконтиране), то ранното упражняване като кол никога не е оптимално - феномен, който се отнася за много други американски кол деривативи, включително обичайните опции. Интересно е да се отбележи, че въпреки това кол спецификацията има своето въздействие – тя се появява чрез броя на кол-дяловете, но не и чрез кол-страйка.

В глава 8 изследваме кои платежни структури водят до подобен двустранен проблем за оптимално спиране – получени са достатични условия. Оказва се, случаят е такъв, ако инфинитезималният генератор, приложен към платежната функция, разделя пространството $\mathbb{R}^+$ на три интервала – генераторът е положителен в средния и отрицателен в останалите. За да илюстрираме нашия модел, въвеждаме и изследваме така наречените квадратични стренгъли с платежна функция $(x-K)^2$. Тези инструменти могат да бъдат полезни за инвеститори, които предпочитат да хеджират по-силно позициите далече от страйка, и по-слабо тези близо. Оказва се, че тези деривативи могат да доведат до едностранни задачи, както и до двустранни в зависимост от позицията на дисконтовия процент λ спрямо константата $r+\sigma^2$ – двата случая се изследват по отделно.

Останалата част от дисертацията е посветена на така наречените отменими (отменяеми) американски опции, известни още като игрови или израелски опции. В допълнение към правото на притежателя да упражни предсрочно, отменимите опции предоставят на издателя си правото да прекрати договора, като заплати сума над обичайния платежна функция. По принцип тези инструменти водят до двустранни задачи за излизане от ивица. За разлика от стренгълите, които максимизират двумерни функционали, отменяемите опции са свързани с намиране на седлова точка в пространството на случайните Марковски моменти. Кол и пут вариантите са изследвани чрез нашия подход в глави 9 и 10. Доказваме, че оптималните граници решават двумерна нелинейна система, която има единствено решение. Ако имаме кол опция, то множеството за упражняване на притежателя се състои от всички точки над определено ниво, докато това на издателя може да бъде интервал с лява крайна точка равна на страйка, само токата $\{K\}$ или дори празното множество. В последния случай опцията се превръща в обикновена американска. За останалите точки запазването на опцията е по-добро от незабавното упражняване и за двамата участници. Резултатите за пут опциите са подобни, но в известен смисъл обратни - множеството на притежателя се състои от всички точки под някаква граница, докато това на издателя може да бъде интервал $(B,K]$, точката $\{K\}$, или празното множество. В Глава 11 изследваме опции, чиято неустойка е пропорция от обичайната платежна функция. Резултатите за оптималните множества са подобни. Основната разлика е, че всички точки под страйка са оптимални за кол-отменяемите. От друга страна, ако предположим, че притежателят ще упражни по-късно, ако това осигурява същия финансов резултат, тези точки могат да се разглеждат като част от множеството за запазване. Интересен резултат е, че и двете оптимални граници за пут опция съвпадат със страйка, когато $r \geq 0$. Същото важи и за кол опциите, когато $r \leq 0$

и $\lambda > 0$. И накрая, в глава 12 дефинираме нов клас отменими опции, въвеждащи някои конвертируеми характеристики. Неустойката, която писателят дължи за правото си на предсрочно анулиране, се състои от три части - пропорция от обичайната платежна функция, брой дялове от основния актив и фиксирана сума. Получаваме някои резултати за оптималните граници и съответните множества. Изглежда, че това обобщение не е тривиално, а в известен смисъл затваря множеството на отменяемите опции. Това изследване е оставено за по-нататъшна работа. Грубо казано, колкото е по-голяма неустойката, толкова опцията е по-близо до обикновената американска. Отменяемите (пут) опции при наличие на краен матуритет са разгледани в глава 13. Използваният в тази дисертация подход е адаптиран към тези инструменти. Основната разлика е, че притежателят максимизира печалбата си, докато издателя минимизира финансовия си резултат. Оказва се, че има две критични стойности за времето до падежа $0 \leq \tau_1 \leq \tau_2 \leq \infty$. За достатъчно малки падежи, $\tau \leq \tau_1$, опцията е обикновена американска. Ако $\tau \in (\tau_1, \tau_2]$, тогава оптималната граница на писателя е страйкът. Случаят $\tau_1 = \infty$ е възможен. И накрая, ако $\tau > \tau_2$, то опцията е истински отменяема – оптималното множество за издателя е интервал $(K, A(\tau))$ за кол опции и $(B(\tau), K)$ за пут.

И накрая, но не по значеним, представяме в Глава 14 някои избрани MATLAB кодове за оценяване на разглежданите финансови инструменти. Те реализират конструираните алгоритми базирани на получените теоретични резултати.

2 Някои резултати за първо достигане до ниво

В Глава 2 са изведени някои резултати за първо достигане на брауново движение до (по части) линейни граници. Необходимостта от тези резултати е мотивирана от лог-нормалния процес, който използваме за моделиране на основния актив

$$dS_t = (r - \delta) S_t dt + \sigma S_t dB_t \tag{2.1}$$

Ако означим границата с $b(t) = b_1 t + b_2 > K$, моментът на първо достигане с τ, матуритетът с T, и цената на изпълнение с K, то настоящата стойност на крайното плащане на кол-опция може да се запише като

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[e^{-\theta t}(S_t - K)^+\right] &= S_0 \mathbb{E}\left[e^{-\left(\theta - r + \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau + \sigma b(\tau)} \Lambda_T\right] - K\mathbb{E}\left[e^{-\theta\tau}\Lambda_T\right] \\ &+ S_0 e^{-\left(\theta - r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T} \mathbb{E}\left[e^{\sigma B_T} I_{\tau \geq T, S_T > K}\right] - K\mathbb{P}\left(S_T \in (K, b(T)), \tau \geq T\right),\end{aligned} \tag{2.2}$$

където Λ_t е индикаторът τ да се случи преди t. Виждаме, че се нуждаем от Лапласовта трансформацията на момента на достигане, ако той се случва преди матуритета, и от трансформацията свързана с Брауновото движение ако $\tau \geq T$. Тези резултати са доказани в глава 2.2 като теореми 2.1 и 2.2:

Theorem 2.1 (Theorem 3.1 from Zaevski (2020c)). *Нека $\theta > 0$. Лапласовата трансформация на τ преди T е*

$$L\left(T,\theta;b_1,b_2\right) = \mathbb{E}\left[e^{-\theta\tau}\Lambda_T\right] = e^{b_2\left(\sqrt{b_1^2+2\theta}-b_1\right)} g\left(T;\sqrt{b_1^2+2\theta},b_2\right), \tag{2.3}$$

където функцията $g\left(\cdot\right)$ е

$$g\left(T;b_1,b_2\right) \equiv \mathbb{P}\left(\tau < T\right) = 1 - N\left(\frac{b_1 T + b_2}{\sqrt{T}}\right) + \exp\left(-2b_1 b_2\right) N\left(\frac{b_1 T - b_2}{\sqrt{T}}\right). \tag{2.4}$$

Theorem 2.2 (Theorem 3.2 from Zaevski (2020c)). *Ако $z < b\left(T\right)$, то*

$$\begin{aligned} &V\left(\theta,z,T;b_1,b_2\right) \equiv \mathbb{E}\left[e^{\theta B_T} I_{B_T>z,\tau>T}\right] = \\ &= \exp\left(\frac{T\theta^2}{2}\right)\left[\begin{array}{l} N\left(\frac{b(T)-T\theta}{\sqrt{T}}\right) - N\left(\frac{z-T\theta}{\sqrt{T}}\right) \\ +e^{2b_2(\theta-b_1)}\left(N\left(\frac{z-T\theta-2b_2}{\sqrt{T}}\right) - N\left(\frac{b(T)-T\theta-2b_2}{\sqrt{T}}\right)\right) \end{array}\right]. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Ако функцията $b\left(t\right)$ е по части линейна, то тези теореми изглеждат по следния начин

Theorem 2.3 (Theorem 4.1 from Zaevski (2020c)). *Нека $\theta > 0$. Лапласовата трансформация на τ при положение, че той се случва в m-ия интервал е*

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left[e^{-\theta\tau} I_{\tau\in(t_{m-1},t_m]}\right] \\ &= \int\limits_{-\infty}^{\beta_1,\dots,\beta_{m-1}} \left(\begin{array}{l} \prod\limits_{i=1}^{m-1}\left(1-\exp\left(-\frac{2(\beta_{i-1}-x_{i-1})(\beta_i-x_i)}{t_i-t_{i-1}}\right)\right) \\ \prod\limits_{i=1}^{m-1}\frac{\left(\exp\left(-\frac{(x_i-x_{i-1})^2}{2(t_i-t_{i-1})}\right)\right)}{\sqrt{2\pi(t_i-t_{i-1})}} \\ e^{-\theta t_{m-1}} L\left(t_m-t_{m-1},\theta;b_{1,m},\beta_{m-1}-x_{m-1}\right) \end{array}\right) dx_1 \dots dx_{m-1}, \end{aligned} \tag{2.6}$$

където функцията $L\left(\cdot\right)$ се дава от формула (2.3).

Theorem 2.4 (Theorem 4.2 from Zaevski (2020c)). *Ако $z < b\left(T\right)$, то Лапласовата трансформация, при положение, че момента на достигане е след крайния момент T, е*

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left[e^{\theta B_T} I_{B_T>z,\tau>T}\right] \\ &= \int\limits_{-\infty}^{\beta_1,\dots,\beta_{n-1}} \left(\begin{array}{l} \prod\limits_{i=1}^{n-1}\left(1-\exp\left(-\frac{2(\beta_{i-1}-x_{i-1})(\beta_i-x_i)}{t_i-t_{i-1}}\right)\right) \\ \prod\limits_{i=1}^{n-1}\frac{\left(\exp\left(-\frac{(x_i-x_{i-1})^2}{2(t_i-t_{i-1})}\right)\right)}{\sqrt{2\pi(t_i-t_{i-1})}} \\ e^{\theta x_{n-1}} V\left(\theta,z-x_{n-1},t_n-t_{n-1};b_{1,n-1},\beta_{n-1}-x_{n-1}\right) \end{array}\right) dx_1 \dots dx_{n-1}, \end{aligned} \tag{2.7}$$

където функцията $V\left(\cdot\right)$ се задава чрез формула (2.5).

Ако разглеждаме финансов дериватив с ограничена от двете страни област на запазване, тогава момента на упражняване е първото напускане на ивица. Такива деривативи са стредъл и стренгъл комбинациите, както и отменяемите опции. Желаните резултати са получени и представени в теореми 2.6, 2.7 и 2.8 от глава 2.4. Също така доказваме резултатите, когато границите са по части линейни и едната от тях изчезва след някакъв момент – Теорема 2.9.

В тази глава изследваме и някои граници, свързани с изследваните трансформации на Лаплас. Тяхната необходимост възниква, когато разглеждаме така деривативи без падежни ограничения – $T = \infty$. Резултатите са формулирани в две теореми – 2.10 и 2.11:

Theorem 2.10 (Theorem 3.1 from Zaevski (2024a))**.** *Нека θ е положителна константа и ζ е момента на първо достигане на брауново движвние до линейна функция $b(t) = b_1 t + b_2$. Следните твърдения са верни.*

1. *Ако* $\{b_2 = 0\}$, *то* $\lim_{T\to\infty} e^{kT}\mathbb{E}\left[e^{\theta B_T} I_{T<\zeta}\right] = 0$.
2. *Ако* $\left\{b_2 \neq 0, k < -\frac{\theta^2}{2}\right\}$, *то* $\lim_{T\to\infty} e^{kT}\mathbb{E}\left[e^{\theta B_T} I_{T<\zeta}\right] = 0$.
3. *Ако* $\left\{b_2 \neq 0, b_1 = \theta, k = -\frac{\theta^2}{2}\right\}$, *то* $\lim_{T\to\infty} e^{kT}\mathbb{E}\left[e^{\theta B_T} I_{T<\zeta}\right] = 0$.
4. *Ако* $\left\{b_2 \neq 0, b_1 = \theta, k > -\frac{\theta^2}{2}\right\}$, *то* $\lim_{T\to\infty} e^{kT}\mathbb{E}\left[e^{\theta B_T} I_{T<\zeta}\right] = \infty$.
5. *Ако* $\left\{b_2 > 0,\ b_1 < \theta,\ k = -\frac{\theta^2}{2}\right\}$, *то* $\lim_{T\to\infty} e^{kT}\mathbb{E}\left[e^{\theta B_T} I_{T<\zeta}\right] = 0$.
6. *Ако* $\left\{b_2 > 0,\ b_1 > \theta,\ k = -\frac{\theta^2}{2}\right\}$, *то* $\lim_{T\to\infty} e^{kT}\mathbb{E}\left[e^{\theta B_T} I_{T<\zeta}\right] = 1 - e^{2b_2(\theta - b_1)}$.
7. *Ако* $\left\{b_2 > 0,\ b_1 > \theta,\ k > -\frac{\theta^2}{2}\right\}$, *то* $\lim_{T\to\infty} e^{kT}\mathbb{E}\left[e^{\theta B_T} I_{T<\zeta}\right] = \infty$.
8. *Ако* $\left\{b_2 > 0,\ b_1 < \theta,\ -\frac{\theta^2}{2} < k \leq \frac{b_1^2}{2} - \theta b_1\right\}$, *то* $\lim_{T\to\infty} e^{kT}\mathbb{E}\left[e^{\theta B_T} I_{T<\zeta}\right] = 0$.
9. *Ако* $\left\{b_2 > 0,\ b_1 < \theta,\ \frac{b_1^2}{2} - \theta b_1 < k\right\}$, *то* $\lim_{T\to\infty} e^{kT}\mathbb{E}\left[e^{\theta B_T} I_{T<\zeta}\right] = \infty$.
10. *Ако* $\left\{b_2 < 0,\ b_1 > \theta,\ k = -\frac{\theta^2}{2}\right\}$, *то* $\lim_{T\to\infty} e^{kT}\mathbb{E}\left[e^{\theta B_T} I_{T<\zeta}\right] = 0$.
11. *Ако* $\left\{b_2 < 0,\ b_1 < \theta,\ k = -\frac{\theta^2}{2}\right\}$, *то* $\lim_{T\to\infty} e^{kT}\mathbb{E}\left[e^{\theta B_T} I_{T<\zeta}\right] = 1 - e^{2b_2(\theta - b_1)}$.
12. *Ако* $\left\{b_2 < 0,\ b_1 < \theta,\ k > -\frac{\theta^2}{2}\right\}$, *то* $\lim_{T\to\infty} e^{kT}\mathbb{E}\left[e^{\theta B_T} I_{T<\zeta}\right] = \infty$.
13. *Ако* $\left\{b_2 < 0,\ b_1 > \theta,\ -\frac{\theta^2}{2} < k \leq \frac{b_1^2}{2} - \theta b_1\right\}$, *то* $\lim_{T\to\infty} e^{kT}\mathbb{E}\left[e^{\theta B_T} I_{T<\zeta}\right] = 0$.

14. Ако $\left\{b_2 < 0,\ b_1 > \theta,\ \frac{b_1^2}{2} - \theta b_1 < k\right\}$, *то* $\lim_{T\to\infty} e^{kT}\mathbb{E}\left[e^{\theta B_T} I_{T<\zeta}\right] = \infty$.

Теорема 2.11 е за подобен проблем в случая, когато Брауновото движение е ограничено от друга линейна функция.

3 Основни положения

Както споменахме по-горе, нашето изследване е поставено в рамката на известния модел на Black and Scholes (1973) – основният актив се моделира чрез лог-нормалната дифузия

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dB_t, \tag{3.1}$$

където r е безрисковият лихвен процент, а σ е волатилността. Да обърнем внимание, че динамиката (3.1) е спрямо рисково-неутралната мярка. Да предположим, че европейски дериватив матурира, когато активът напусне множество D, чиято граница е ∂D. Ако τ е първия изход а платежната функция е $G(t,x)$, тогава принципът на рисково-неутралното ценообразуване гласи, че цената на дериватива може да се намери като

$$Y_t = \mathbb{E}^{t,S_t}\left[e^{-r(\tau-t)} G(\tau, S_\tau)\right]. \tag{3.2}$$

Алтернативно, цената на дериватива може да бъде записана като функция на времето и текущата цена на основния актива – $Y_t = V(t, S_t)$. Уравнението на Колмогоров ни дава, че функцията $V(\cdot,\cdot)$ е решения на частното диференциално уравнение (ЧДУ)

$$\begin{aligned} &V_t(t,x) + \left(\mathcal{A}^{\mathbb{Q}} V\right)(t,x) - rV(t,x) = 0, \quad (t,x) \in D \\ &V(t,x) = G(t,x), \quad (t,x) \in \partial D, \end{aligned} \tag{3.3}$$

където $\mathcal{A}^{\mathbb{Q}}$ е инфинитезималния генератор на дифузията (3.1) спрямо рисково-неутралната мярка $\mathbb{Q}$. Уравнението (3.3) е известното уравнение на Блек-Шоулс. Ако активът изплаща непрекъснато дивиденти при процент λ, тогава динамиката (3.1) се превръща в

$$dS_t = (r - \lambda) S_t dt + \sigma S_t dB_t. \tag{3.4}$$

Разбира се, уравнението на Блек-Шоулс (3.3) се нуждае от малка модификация. В нашето изследване дивидентите са въведени по алтернативен начин чрез подход, предложен от Shiryaev et al. (1995). Рисково-неутралната динамика (3.1) запазва формата си, но платежната функция се променя на $N(t,x) = e^{\lambda t} g(x)$. Този метод е възможен благодарение на следната теорема:

Theorem 3.1 (See Proposition 2.3 from Zaevski (2020b))**.** *Модел параметризиран чрез* (r, λ, δ) *е еквивалентен на* $(r - \delta, \lambda + \delta, 0)$*-модел в смисъл, че дериватива има една и съща цена в началния момент и при двете алтернативи.*

По този начин кол- и пут- платежните функции могат да се запишат като

$$\begin{aligned} N(t,x) &= e^{-\lambda t}(x-K)^{+} \quad \text{call} \\ N(t,x) &= e^{-\lambda t}(K-x)^{+} \quad \text{put.} \end{aligned} \tag{3.5}$$

Нека се върнем към американските деривативи. Правото на ранно упражняване води до проблем за оптимално спиране. Така уравнението на Блек-Шоулс (3.3) се превръща в диференциално урвнение със свободна граница – трябва да намерим както решението, така и областта D, в която то е изпълнено. Класическият метод за решаване на тези задачи използва двумерна интегро-диференциална система за свободната граница и ценовата функция.

В настоящото изследване ние предлагаме различен подход, основан на максимизиране на пеалбата на държателя на дериватива. Наред със своята интуитивност, този метод има и друго голямо предимство – изисква относително малко изчислително време. От друга страна, често притежателят не се нуждае от справедливата цена на опцията, а само дали е оптимално да се упражни веднага или не. Ако използваме класическия подход, трябва да решим двумерната система, докато нашият метод връща незабавно оптималната стойност в текущия момент.

По същество, нашият метод разделя задачата със свободната граница на две части. Първо, апроксимираме оптималната граница. Така достигаме до ЧДУ върху известно множество. Можем да го решим по два начина – чрез очакването (3.2) или чрез ЧДУ-то (3.3). По-късно ще конструираме някои Монте Карло методи за определяне на очакването (3.2). Като алтернатива, ние модифицираме експлицитния, имплицитния и Кранк-Николсън–метода на крайната разлики към ЧДУ-то. Съвсем очаквано, последният е най-подходящ поради своята стабилност (A-стабилност, не L-стабилност).

В цялата дисертация ще използваме следните константи:

$$\begin{aligned} p &:= \frac{x_1 - x_2}{\sigma} = 2\sqrt{\left(\frac{r}{\sigma^2} - \frac{1}{2}\right)^2 + 2\frac{r+\lambda}{\sigma^2}} \\ q &:= -\frac{x_2}{\sigma} = \sqrt{\left(\frac{r}{\sigma^2} - \frac{1}{2}\right)^2 + 2\frac{r+\lambda}{\sigma^2}} + \frac{r}{\sigma^2} - \frac{1}{2}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Те са свързани с корените на квадратно уравнение, което характеризира първото достигане на брауново движение до линейна граница. Имаме $p \geq q + 1$, като равенство се достига само в недисконтирания случай.

4 Нов метод за оценка на дисконтирани Американски деривативи

В тази глава изследваме американските опции чрез нашия подход при наличие на допълнително дисконтиране. За някои фундаментални резултати в областта препоръчваме Kim (1990), Jacka (1991), Jacka (1991) и Carr et al. (1992).

Доказваме всички основни свойства на оптималните граници и свързаните с тях множества. Както обикновено, притежателят на американска кол опция упражнява, когато базовият актив е над оптималната граница и обратно за пут. Резултатите за опции без матуритет са обобщени в теореми 4.1 и 4.2:

Theorem 4.1. *Нека $T = \infty$. Цената на дисконтирана американска кол опция, издадена върху актив с начална цена под границата на упражняване $S_0 = x < c$ и цена на изпълнение K е*

$$V(x) = \left(\frac{x}{p-q}\right)^{p-q}\left(\frac{p-q-1}{K}\right)^{p-q-1}, \tag{4.1}$$

където p and q са дадени в (3.6). Да отбележим, че $p > q + 1$ когато $\lambda > 0$.

Ако началната стойност на актива е над оптималнат границата, тогава цената на опцията е $V(x) = x - K$. Самата границата е

$$c = \frac{p-q}{p-q-1}K. \tag{4.2}$$

Оптималната стратегия е първото достигане до $[c, \infty)$.

Theorem 4.2. *Ако началната цена на актива е над оптималнат границата, $S_0 = x > c$, то цената на американска пут опция е*

$$V(x) = \left(\frac{K}{q+1}\right)^{q+1}\left(\frac{q}{x}\right)^{q}, \tag{4.3}$$

Ако началната стойност на актива е под границата, то цената е

$$V(x) = K - x. \tag{4.4}$$

Границата е

$$c = \frac{q}{q+1}K. \tag{4.5}$$

Да обобщим подхода за апроксимиране на оптималната граница за американска пут опция чрез експонента на по части линейни функции. Нека времевият интервал $[0, T]$ е разделен на n подинтервала $0 \equiv t_0 < t_1 < ... < t_n \equiv T$. Да предположим, че стратегията на притежателя ζ е да упражни, когато активът достигне ниво $\exp(a_i t + b_i)$, ако това се случи в интервала $[t_{i-1}, t_i)$, $i = 1, 2, ..., n$. Налагаме и непрекъснатост $\exp(a_i t_i + b_i) = \exp(a_{i+1} t_i + b_{i+1}) \equiv C_i$. Да приемем, че базовият актив стартира от стойност x, т.е. $S_0 = x$. Следователно упражняването се случва, когато брауновото движение достигне ниво

$$\frac{1}{\sigma}\left(\left(a_i - r + \frac{\sigma^2}{2}\right)t + b_i - \log(x)\right) = A_i t_i + B_i \tag{4.6}$$

за

$$
\begin{aligned}
A_i &= \frac{1}{\sigma}\left(a_i - r + \frac{\sigma^2}{2}\right) \\
B_i &= \frac{b_i - \log(x)}{\sigma}.
\end{aligned}
\tag{4.7}
$$

Нека дефинираме дериватив, който плаща сума от $\exp(-\lambda(\zeta \wedge T))(K - S_{\zeta\wedge T})^+$ в момент $\zeta \wedge T$. Означаваме цената му с

$$
\begin{aligned}
&V(x; \{t_0, ..., t_n\}; \{C_0, ..., C_n\}) = \mathbb{E}^x\left[e^{-(r+\lambda)(\tau\wedge T)}(K - S_{\tau\wedge T})^+\right] \\
&= \mathbb{E}^x\left[e^{-(r+\lambda)\tau}(K - S_\tau)\Lambda_T\right] + E^x\left[e^{-(r+\lambda)T}(K - S_T)^+\Phi_T\right] \\
&= K\mathbb{E}\left[e^{-\alpha_1\tau}\Lambda_T\right] - x\sum_{m=1}^{n} e^{\sigma B_m} E\left[e^{-\alpha_{2,m}\tau} I_{t_{m-1}<\tau\le t_m}\right] \\
&+ Ke^{-\alpha_1 T}\mathbb{Q}(B_T < k, \Phi_T = 1) - xe^{-\alpha_3 T}\mathbb{E}\left[e^{\sigma B_T} I_{B_T<k,\Phi_T=1}\right]
\end{aligned}
\tag{4.8}
$$

за

$$
\begin{aligned}
\alpha_1 &= r + \lambda \\
\alpha_{2,m} &= (r+\lambda) - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) - A_m\sigma = \frac{\sigma^2}{2} - A_m\sigma + \lambda \\
\alpha_3 &= \lambda + \frac{\sigma^2}{2} \\
k &= \frac{1}{\sigma}\log\left(\frac{K}{x}\right) - \left(\frac{r}{\sigma} - \frac{\sigma}{2}\right)T.
\end{aligned}
\tag{4.9}
$$

Нашият алгоритъм се основава на уравнения (4.8) и (4.9).

1. Стойността на оптималнат границата при падежа, C_n, е

$$
c(T) = \min\left(\frac{r+\lambda}{\lambda}, 1\right)K. \tag{4.10}
$$

2. Да предположим, че сме намерили стойностите C_m, C_{m+1}, ..., C_n за някое $m \le n$. Нека фиксираме $x \le K$ и означим с $C(x)$

$$
C(x) = \arg\max\{C : V(x; \{0, t_m - t_{m-1}, ..., t_n - t_{m-1}\}; \{C, C_m, ..., C_n\})\}. \tag{4.11}
$$

   Можем да намерим C_{m-1} чрез една от формулите

$$
\begin{aligned}
C_{m-1} &= \max\left\{x : C\left(x\right) = x\right\} \\
C_{m-1} &= \max\left\{x : V\left(x; \left\{0, t_m - t_{m-1}, ..., t_n - t_{m-1}\right\}; \left\{C\left(x\right), C_m, ..., C_n\right\}\right) = K - x\right\}
\end{aligned} \tag{4.12}
$$

Функции $V\left(x; \left\{0, t_m - t_{m-1}, ..., t_n - t_{m-1}\right\}; \left\{C, C_m, ..., C_n\right\}\right)$ се изчисляват чрез уравнения (4.8) и (4.9).

Нека обсъдим този алгоритъм. Ако действителната оптимална граница наистина е експонента от по части линейна функция, тогава константата $C\left(x\right)$ няма да зависи от конкретната стойност на първоначалната цена на актива x. Така че можем да фиксираме едно x и да намерим стойността на C. Това предположение обаче е необосновано и затова се нуждаем от друг подход. Търсим най-голямото x, за което $C\left(x\right) = x$ – това е най-голямата първоначална стойност за актива, която да прави незабавното упражнение оптимално.

Оказва се, че този алгоритъм приближава оптималната граница много точно, използвайки само три стъпки. Резултатът за цената на опцията също е близък до реалния. Времето за изчисление е незначително. Ако се нуждаем от изключително висока точност, тогава можем да изпълним няколко пъти алгоритъма с различно времево разделяне и по този начин да апроксимираме границата върху по-плътна мрежа. Въз основа на нея създаваме Монте Карло метод за намиране на очакването (3.2), имайки предвид някои резултати на Wang and Pötzelberger (1997):

1. Генерираме $m-1$ нормално разпределени стойности с нулево очакване и стандартно отклонение единица. Те образуват вектора u.

2. Нека D е $(m-1)\times(m-1)$ диагонална матрица съставена от $\sqrt{T/N}$ и M е $(m-1)\times(m-1)$ долна триъгълна матрица със стойности единици. Дефинираме вектора x като $x = MDu$.

3. Изчисляваме стойностите на функцията

$$
w_j = e^{-\alpha t_{m-1}} L\left(t_m - t_{m-1}, \alpha; a_m, b_m - x_{m-1}\right).
$$

4. Извеждаме стойностите на функцията

$$
v_j = v\left(x_1, ..., x_{m-1}\right) = \prod_{i=1}^{m-1} I_{x_i<\bar{c}_i}\left(1 - \exp\left(-\frac{2\left(\bar{c}_{i-1} - x_{i-1}\right)\left(\bar{c}_i - x_i\right)}{\frac{T}{N}}\right)\right).
$$

5. Изчисляваме $p_j = w_j v_j$.

6. Изчисляваме отрязаната Лапласова трансформация, повтаряйки горната процедура H пъти и усредлнявайки $\left(\sum_{i=1}^{H} p_i\right)\Big/H$.

Последните два члена в уравнението (4.8) се получават по същия начин, като се вземе $m = n$ и се промени членът $e^{-\alpha t_{m-1}} L(\cdot)$ в w (стъпка 3) на $e^{-\alpha x_{m-1}} U(\cdot)$ и $e^{-\alpha x_{m-1}} V(\cdot)$, съответно.

Резултатите за кол опции се получават чрез някои симетрични аргументи.

5 Оценяване на Американски опции при ограничение за цената на основния актив

За някои основни резултатите препоръчваме Broadie and Detemple (1995) and Detemple and Tian (2002). Ограничената опция лимитира спот цената, на която държателя може да упражни опцията, до фиксирано ниво – да речем L. Така платежните функции се задават чрез

$$\begin{aligned} N(t,x) &= e^{-\lambda t}\left(S_t \wedge L - K\right)^+ \\ N(t,x) &= e^{-\lambda t}\left(K - S_t \vee L\right)^+, \end{aligned} \tag{5.1}$$

В съгласие с Broadie and Detemple (1995), установяваме формата на оптималните граници:

Theorem 5.1 (Theorem 3.1 of Zaevski (2022a))**.** *Ако $c^A(t)$ е оптималната граница за опция без ограничаване, тогава границата на дисконтираната американска ограничена пут опция е $c(t) = c^A(t) \vee L$.*

Theorem 5.3 (Theorem 4.1 of Zaevski (2022a))**.** *Границата за упражняване на американска ограничена кол опция е $c(t) = c^A(t) \wedge L$.*

Важно е да се отбележи, че тези теореми са доказани чрез техника, базирана на инфинитезималните генератори – тя ни позволява да обобщим резултатите за различни стохастични процеси.

Изведена е следната теорема за цената на пут опция при краен матуритет.

Theorem 5.2 (Theorem 3.2 of Zaevski (2022a))**.** *Нека константите D_1 и D_2 са*

$$\begin{aligned} D_1 &= \min\left(\frac{r+\lambda}{\lambda}, 1\right) K \\ D_2 &= \frac{q}{q+1} K. \end{aligned} \tag{5.2}$$

В случай, че $L \in (D_2, D_1)$, ще означаваме с τ^* това време до падежа, за което $c^A(\tau^*) = L$. Цената на американска ограничена пут опция може да бъде получена чрез едно от следните твърдения.

1. *Да предположим, че $L \in [D_1, K)$. Ако $S_0 \le L$, то цената е $V = K - L$. В противен случай, ако $S_0 > L$, то цената е*

$$
\begin{aligned}
V &= (K-L)\, e^{b_2\left(\sqrt{b_1^2+2(r+\lambda)}-b_1\right)} g\left(T, \sqrt{b_1^2+2(r+\lambda)}, b_2\right) \\
&\quad + K e^{-(r+\lambda)T} W\left(0, d(T,K), T; b_1, b_2\right) - S_0 e^{-\left(\lambda+\frac{\sigma^2}{2}\right)T} W\left(-\sigma, d(T,K), T; b_1, b_2\right) \\
&\quad g(T; b_1, b_2) = 1 - N\left(\frac{b_1 T + b_2}{\sqrt{T}}\right) + \exp(-2b_1 b_2)\, N\left(\frac{b_1 T - b_2}{\sqrt{T}}\right) \\
&\quad d(t,x) = \frac{\ln S_0 - \ln x}{\sigma} + \left(\frac{r}{\sigma} - \frac{\sigma}{2}\right) t \\
&\quad W(\theta, z, T; b_1, b_2) \\
&\quad = \exp\left(\frac{T\theta^2}{2}\right) \left[\begin{array}{l} N\left(\frac{b(T)-T\theta}{\sqrt{T}}\right) - N\left(\frac{z-T\theta}{\sqrt{T}}\right) \\ +e^{2b_2(\theta-b_1)}\left(N\left(\frac{z-T\theta-2b_2}{\sqrt{T}}\right) - N\left(\frac{b(T)-T\theta-2b_2}{\sqrt{T}}\right)\right) \end{array}\right] \\
b_1 &= \frac{r}{\sigma} - \frac{\sigma}{2} \\
b_2 &= \frac{\ln S_0 - \ln L}{\sigma}.
\end{aligned}
\tag{5.3}
$$

2. *Да предположим, че $L \in (D_2, D_1)$ и $T > \tau^*$. Ако $S_0 \le L$, то $V = K - L$. Ако $S_0 > L$, то цената на американската ограничена опция е*

$$
\begin{aligned}
V &= (K-L)\, e^{b_2\left(\sqrt{b_1^2+2(r+\lambda)}-b_1\right)} g\left(T-\tau^*, \sqrt{b_1^2+2(r+\lambda)}, b_2\right) \\
&\quad + e^{-(r+\lambda)(T-\tau^*)} \int_{-\infty}^{d(T-\tau^*, L)} A\left(S_0 e^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-\tau^*)-\sigma y}, \tau^*\right) f(T-\tau^*, y)\, dy,
\end{aligned}
\tag{5.4}
$$

   където A е цената на съответната обикновена американска опция.

3. *Ако $L \le D_2$ или $L \in (D_2, D_1) \cap T \le \tau^*$, то опцията е обикновена американска и нейната цена може да бъде намерена с помощта на предоставения подход в Глава 4.*

Тази теорема предоставя явна формула в първия случай, докато в третия случай имаме обикновена американска опция. Нека обсъдим втория случай. Численият подход за оценяване на американски опции, използван в Глава 4 (без значение дали с крайни разлики или Монте Карло), позволява извличането на цените на обичайната пут опция за различни първоначални стойности на базовия актив наведнъж. Така интегралът във формула (5.4) може лесно да бъде оценен, което прави оценяването на ограничената опция много бързо.

Резултатите за кол опциите се получават по подобен начин.

6 Някои обобщения на Американските опции

В тази глава представяме метод за определяне кога една платежна функция води до задача, подобна на тази за класическите американски опции в смисъл, че пространството на състоянието може да бъде разделено на две свързани части – оптимален и регион за запазване. Ще казваме, че деривативa е кол вид, ако оптималният регион е отгоре. Ако е отдолу, наричаме деривативa пут стил. Нека платежната функция е

$$N(t,x) = e^{-\lambda t} G(x) \tag{6.1}$$

Дефинираме следния диференциален оператор, свързан с инфинитезималния, върху C^2-функциите:

$$(\mathcal{B}g)(x) = (\mathcal{A}g)(x) - (r+\lambda)\, g(x)\,. \tag{6.2}$$

Доказваме, че следните условия водят до такива инструменти:

1. Кол: ако $(\mathcal{B}G)(x) < 0$ за някое x, то $(\mathcal{B}G)(y) < 0$ за всички $y \geq x$.
2. Пут: ако $(\mathcal{B}G)(x) < 0$ за някое x, то $(\mathcal{B}G)(y) < 0$ за всички $y \leq x$.

Да се обърнем към кол-деривативите при безкраен времеви интервал. Нека функцията $g_c(c)$ бъде дефинирана като

$$g_c(c) = \frac{G(c)}{c^{p-q}}, \tag{6.3}$$

Ако стартира от ниво x, то финансовият резултат от стратегията на първо достигане до c е

$$V^c(x;c) = g_c(c)\, x^{p-q} + \lim_{T\to\infty} \mathbb{E}^x \left[e^{-(r+\lambda)T} G(S_T)\, I_{T<\zeta^c} \right]. \tag{6.4}$$

Доказваме, че тази функция няма повече от един локален максимум в интервала $[x,\infty)$. Ако означим с $c(x)$ глобалния максимум в този интервал, то доказваме следния резултат:

1. Ако съществува начална точка x, за която x е строго по-малко от $c(x)$, $x < c(x)$, то $c(x)$ е оптималната граница.
2. Ако $x = c(x)$ за всички x, тогава оптималната граница е нула, т.е. всички точки са оптимални.
3. Ако $x < c(x)$ за всяко x, то оптималната граница е безкрайност, т.е. ранното упражняване никога не е оптимално.

Така получаваме оптималната граница c и цената, до която тя води чрез формула (6.4).

Пут-стойността се задава чрез:

$$V^p(x;c) = \frac{g_p(c)}{x^q} + \lim_{T\to\infty} \mathbb{E}^x \left[e^{-(r+\lambda)T} G(S_T) I_{T<\zeta^c} \right], \tag{6.5}$$

където функцията $g_p(\cdot)$ е

$$g_p(c) = G(c)\, c^q. \tag{6.6}$$

В този случай ние максимизираме в интервала $(0, x]$. Резултатът за оптималната граница е:

1. Ако $c(x) < x$ за някое x, то оптималната граница е именно $c(x)$.
2. Ако $c(x) = x$ за всички x, то всички точки са оптимални.
3. Ако $c(x) < x$ за всички x, то ранното упражняване никога не е оптимално.

Финансовите инструменти с краен падеж се оценяват чрез подхода за обичайните американски опции, представен в глава 3.

Като частен случай разглеждаме платежни функции в степенен вид $G(x) = Mx^n + K$, където $n > 0$ и $M \in \{-1, 1\}$. Оказва се, че следната константа е много важна:

$$L = (n-1)\left(r + \frac{\sigma^2}{2} n\right) - \lambda. \tag{6.7}$$

Да означим с A_1 и A_2 крайните точки на оптималната граница на пут-дериватив, а с B_1 и B_2 тези за кол. Да Обърнем внимание, че дериватівът може да комбинира и двете свойства - това се случва, когато ранното упражняване е винаги или никога оптимално. Доказан е следният резултат:

Theorem 6.3 (Theorem 3 of Zaevski (2024c))**.** *В сила са следните твърдения.*

1. *Ако* $\{L = 0,\ K \geq 0\}$, $\{L < 0,\ M = 1,\ K \geq 0\}$ *или* $\{L > 0,\ M = -1,\ K \geq 0\}$, *то дериватива е комбиниран пут-кол и незабавното изпълнение е винаги оптимално. Границите като кол* $B_1 = B_2 = 0$, *а като пут* $A_1 = A_2 = \infty$. *Цената се задава от* $V^c(x) = Mx^n + K$.
2. *Ако* $\{L = 0,\ K < 0\}$, $\{L < 0,\ M = -1,\ K \leq 0\}$ *или* $\{L > 0,\ M = 1,\ K \leq 0\}$, *то дериватива отново е комбиниран пут-кол, но незабавното упражняване никога не е оптимално. Границите като кол са* $B_1 = B_2 = \infty$, *а като пут* $A_1 = A_2 = 0$. *Цената е* $V(x) = Mx^n$ *в първия случай,* $V(x) = 0$ *във втория и* $V(x) = \infty$ *в третия.*

3. *Ако* $\{L<0,\ M=1,\ K<0\}$ *или* $\{L>0,\ M=-1,\ K<0\}$*, то имаме кол-дериватив. Стойностите на оптималните граници се дават с формулите* (6.8) *и* (6.9)*:*

$$\begin{aligned} B_1 &= \left(K\frac{r+\lambda}{L}\right)^{\frac{1}{n}} \\ B_2 &= \left(-K\frac{p-q}{p-q-n}\right)^{\frac{1}{n}} \end{aligned} \tag{6.8}$$

$$\begin{aligned} B_1 &= \left(-K\frac{r+\lambda}{L}\right)^{\frac{1}{n}} \\ B_2 &= \left(-K\frac{p-q}{n-p+q}\right)^{\frac{1}{n}}, \end{aligned} \tag{6.9}$$

съответно. Цената е $V^c(x)=Mx^n+K$*, ако* $x\geq B_2$*. Иначе, цента се задава чрез* $V^c(x)=\frac{B_2^n+K}{B_2^{p-q}}x^{p-q}$ *или* $V^c(x)=\frac{-B_2^n+K}{B_2^{p-q}}x^{p-q}$ *съответно в първия и втория случай.*

4. *Ако* $\{L<0,\ M=-1,\ K>0\}$ *или* $\{L>0,\ M=1,\ K>0\}$*, то имаме пут-дериватив. Границите са*

$$\begin{aligned} A_1 &= \left(-K\frac{r+\lambda}{L}\right)^{\frac{1}{n}} \\ A_2 &= \left(\frac{Kq}{q+n}\right)^{\frac{1}{n}}, \end{aligned} \tag{6.10}$$

for the first case; цената е $V^p(x)=Mx^n+K$ *ако* $x\leq A_2$ *и* $V^p(x)=\frac{\left(-A_2^n+K\right)A_2^q}{x^q}$ *иначе. Началната стойност на оптималната граница* A_1 *за втория случай е* $A_1=\left(K\frac{r+\lambda}{L}\right)^{\frac{1}{n}}$*, докато крайната е нула ,* $A_2=0$*. Цената в този случай е* $V^p(x)=\infty$*.*

Може да изглежда, че изискването за двукратна диференцируемост е доста ограничително, тъй като много търгувани инструменти не го удовлетворяват - например опциите в цената на изпълнение. Всъщност то не е толкова силно, тъй като всички реални финансови деривативи допускат изглаждане на платежните функции. Например тези на опциите могат да бъдат приближени чрез следните функции:

$$G_\epsilon(x)=\begin{cases} 0, & \text{if } x<K \\ \frac{(x-K)^2}{2\epsilon}, & \text{if } K\leq x<K+\epsilon \quad \textit{call} \\ x-K-\frac{\epsilon}{2}, & \text{if } K+\epsilon\leq x. \end{cases} \tag{6.11}$$

$$G_{\epsilon}(x) = \begin{cases} K + \frac{\epsilon}{2} - x, & \text{if } x < K - \epsilon \\ \frac{(K-x)^2}{2\epsilon}, & \text{if } K - \epsilon \le x < K \qquad put \\ 0, & \text{if } K \le x. \end{cases} \tag{6.12}$$

7 Американски стренгъл-стратегии с произволни цени на изпълнение

В тази глава са разгледани така наречените американски стренгъл-стратегии. Някои основни резултати могат да се намерят в Beibel and Lerche (1997) and Shiryaev (1999), Jeon and Oh (2019), and Qiu (2020). Основната им характеристика е комбинираното пут и кол право. Притежателят има право да упражни опцията избирайки и нейния вид – пут или кол. В съществуващата литература е прието че кол-страйка е над пут-страйка – ние се отказваме от това ограничение. Също така приемаме, че теглата на пут и кол правата са различни. Доказваме, че тези инструменти водят до задача за първи изход от ивица. Именно тази ивица е област за запазване на дериватива. Ако инвеститорът предпочита пут-характеристика, той получава $C_1 > 0$ акции от пут опция с цена на изпълнение K_1. Аналогично, ако притежателят избере функция за кол, той получава плащането на $C_2 > 0$ кол опции със страйк-цена K_2. Следователно платежната функция на опцията може да се запише като

$$N(t,x) = e^{-\lambda t} \max\left\{C_1 (K_1 - x)^+, C_2 (x - K_2)^+\right\}. \tag{7.1}$$

Нека D_0 е стойността, която приравнянва пут и кол платежните функции:

$$D_0 := \frac{C_1 K_1 + C_2 K_2}{C_1 + C_2}. \tag{7.2}$$

Наричаме я пут-кол-бариера. Имаме две оптимални граници – между множеството за запазванеи и пут- и кол- оптималните множества. Означаваме тези граници съответно с $A(t)$ и $B(t)$. Доказваме, че пут-границата $A(\tau)$ е ненарастваща спрямо времето до падежа, докато кол-границата $B(\tau)$ не намалява. Началните им стойности са

$$\begin{aligned} D_1 \equiv A(0) &= \min\left\{K_1, \frac{C_1 K_1 + C_2 K_2}{C_1 + C_2}, \frac{r+\lambda}{\lambda} K_1\right\} \\ D_2 \equiv B(0) &= \max\left\{K_2, \frac{C_1 K_1 + C_2 K_2}{C_1 + C_2}, \frac{r+\lambda}{\lambda} K_2\right\}. \end{aligned} \tag{7.3}$$

Оказва се, че незабавното упражняване никога не е оптимално като кол, ако допълнителният дисконтов фактор λ е нула. Да предположим, че $\lambda > 0$. Доказваме, че следното уравнение има единствено решение – то определя оптималните граници при безкраен матуритет:

$$
\begin{aligned}
&a^{p+1} C_1 C_2 K_2 \alpha - a^p C_1 C_2 K_1 \beta - a^{p-q} C_2^2 K_2 \left(\beta - \alpha\right) \\
&- a^{q+1} C_1^2 K_1 \left(\beta - \alpha\right) - a C_1 C_2 K_2 \beta + C_1 C_2 K_1 \alpha = 0,
\end{aligned} \tag{7.4}
$$

където α и β са

$$
\begin{aligned}
\alpha &= \frac{q}{q+1} \\
\beta &= \frac{p-q}{p-q-1}.
\end{aligned} \tag{7.5}
$$

Theorem 7.1 (Theorem 4.1 of Zaevski (2023b))**.** *Да предположим, че $\lambda > 0$ и $\overline{a}$ е решението на уравнение (7.4). Оптималните граници могат да бъдат получени като $\overline{A} = A_1\left(\overline{a}\right)$ и $\overline{B} = \frac{\overline{A}}{\overline{a}}$, където*

$$
A_1\left(a\right) = a \frac{\left(p-q\right)\left(a^q C_1 K_1 + C_2 K_2\right) + q\left(C_2 K_2 + \frac{C_1 K_1}{a^{p-q}}\right)}{\left(p-q-1\right)\left(a^{q+1} C_1 + C_2\right) + \left(q+1\right)\left(C_2 + \frac{C_1}{a^{p-q-1}}\right)}. \tag{7.6}
$$

Тези граници водят до цена

$$
f\left(A,B,x\right) = C_1\left(K_1 - A\right)\left(\frac{A}{x}\right)^q \frac{B^p - x^p}{B^p - A^p} + C_2\left(B - K_2\right)\left(\frac{B}{x}\right)^q \frac{x^p - A^p}{B^p - A^p}. \tag{7.7}
$$

Да предположим, че $\lambda = 0$. Както вече споменахме, ранното упражняване като кол никога не е оптимално. Получаваме следните резултати

Theorem 7.2 (Theorem 4.2 of Zaevski (2023b))**.** *Ако $\lambda = 0$, то ранното упражняване на стренгъл-стратегията никога не е оптимално като кол. Притежателят упражнява като пут, когато базовият актив достигне ниво $\overline{A}$:*

$$
\overline{A} = \frac{2 r C_1 K_1}{\left(C_1 + C_2\right)\left(2r + \sigma^2\right)}, \tag{7.8}
$$

Ако началната точка е под тази стойност, $x \leq \overline{A}$, то цената е $C_1\left(K_1 - x\right)$. В противен случай, ако $x > \overline{A}$, то цената е $Y\left(\overline{A}\right)$, където функцията $Y\left(\cdot\right)$ е

$$
Y\left(A\right) = C_2 x + \left(\frac{A}{x}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}} \left[-A\left(C_1 + C_2\right) + C_1 K_1\right]. \tag{7.9}
$$

Независимо от това, че упражняването като кол никога не е оптимално, пут-границата и цената на опцията зависят от кол-характеристиката чрез броя на акциите C_2, но не и от цената на изпълнение K_2.

Да предположим, че падежът е краен, $T < \infty$. За функции $A\left(t\right)$ и $B\left(t\right)$, $A\left(t\right) < B\left(t\right)$, дефинираме европейски стил дериватив, който изтича като пут, ако активът падне под

$A(t)$ и като кол, ако се покачи над $B(t)$. Назоваваме тези инструменти $(A(t), B(t))$-европейски опции. Съответните Марковски моменти се означават с ζ^A и ζ^B, а по-малкият измежду тях с ζ, $\zeta = \zeta^A \wedge \zeta^B$.

Нека $0 \equiv t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_n \equiv T$ е времева разбивка и $a(t)$ и $b(t)$ са две непрекъснати по части части линейни функции спрямо нея

$$\begin{aligned} a(t) &= \sum_{i=1}^{n} a_i(t) I_{t\in[t_{i-1},t_i]} \equiv \sum_{i=1}^{n} (a_{1,i}t + a_{2,i}) I_{t\in[t_{i-1},t_i]} \\ b(t) &= \sum_{i=1}^{n} b_i(t) I_{t\in[t_{i-1},t_i]} \equiv \sum_{i=1}^{n} (b_{1,i}t + b_{2,i}) I_{t\in[t_{i-1},t_i]}, \end{aligned} \tag{7.10}$$

$a_i(t_i) = a_{i+1}(t_i)$ и $b_i(t_i) = b_{i+1}(t_i)$, $i = 1, 2, ..., n-1$. Налагаме условието $a(t) < b(t)$ както и $a(0) < 0 < b(t)$. Ще апроксимираме оптималните граници като експоненти от такива функции – $A(t) = \exp(a(t))$ за пут-границата и $B(t) = \exp(b(t))$ за кол. Стойностите на тези функции във възлите на времевата мрежата са означени с $\alpha_i = a(t_i)$, $\beta_i = b(t_i)$, $A_i = A(t_i)$ и $B_i = B(t_i)$, $i = 0, 1, ..., n$. Да въведем функциите

$$\begin{aligned} c(t) &= \sum_{i=1}^{n} c_i(t) I_{t\in(t_{i-1},t_i]} \equiv \sum_{i=1}^{n} (c_{1,i}t + c_{2,i}) I_{t\in(t_{i-1},t_i]} \\ d(t) &= \sum_{i=1}^{p} d_i(t) I_{t\in(t_{i-1},t_i]} \equiv \sum_{i=1}^{p} (d_{1,i}t + d_{2,i}) I_{t\in(t_{i-1},t_i]} \end{aligned} \tag{7.11}$$

за

$$\begin{aligned} c_{1,i} &= \frac{a_{1,i} - r}{\sigma} + \frac{\sigma}{2},\ i = 1, ..., n \\ c_{2,i} &= \frac{a_{2,i} - \ln(x)}{\sigma},\ i = 1, ..., n \\ d_{1,i} &= \frac{b_{1,i} - r}{\sigma} + \frac{\sigma}{2},\ i = 1, ..., n \\ d_{2,i} &= \frac{b_{2,i} - \ln(x)}{\sigma},\ i = 1, ..., n. \end{aligned} \tag{7.12}$$

Моментите ζ^A и ζ^B могат да се разглеждат като първо достигане на брауновото движение до функциите $c(t)$ и $d(t)$, съответно. Използвайки тези означенията, представяме цената на $(A(t), B(t))$-европейска опция като

$$
\begin{aligned}
&G\left(x,T;A\left(t\right),B\left(t\right)\right)=\mathbb{E}^{x}\left[C_{1}e^{-(r+\lambda)\zeta^{A}}\left(K_{1}-S_{\zeta^{A}}\right)^{+}I_{\zeta^{A}=\zeta,\zeta<T}\right]\\
&+\mathbb{E}^{x}\left[C_{2}e^{-(r+\lambda)\zeta^{B}}\left(S_{\zeta^{B}}-K_{2}\right)^{+}I_{\zeta^{B}=\zeta,\zeta<T}\right]\\
&+\mathbb{E}^{x}\left[C_{1}e^{-(r+\lambda)T}(K_{1}-S_{T})^{+}I_{T\leq\zeta,S_{T}\in(D_{1},D_{0})}\right]+\mathbb{E}^{x}\left[C_{2}e^{-(r+\lambda)T}(S_{T}-K_{2})^{+}I_{T\leq\zeta,S_{T}\in(D_{0},D_{2})}\right]\\
&=C_{1}K_{1}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left[e^{-(r+\lambda)\zeta^{A}}I_{\zeta\in(t_{i-1},t_{i}],\zeta=\zeta^{A}}\right]-C_{1}x\sum_{i=1}^{n}e^{\sigma c_{2,i}}\mathbb{E}\left[e^{-\psi_{1,i}\zeta^{A}}I_{\zeta\in(t_{i-1},t_{i}],\zeta=\zeta^{A}}\right]\\
&+C_{2}x\sum_{i=1}^{n}e^{\sigma d_{2,i}}\mathbb{E}\left[e^{-\psi_{2,i}\zeta^{B}}I_{\zeta\in(t_{i-1},t_{i}],\zeta=\zeta^{B}}\right]-C_{2}K_{2}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left[e^{-(r+\lambda)\zeta^{B}}I_{\zeta\in(t_{i-1},t_{i}],\zeta=\zeta^{B}}\right]\\
&+C_{1}K_{1}e^{-(r+\lambda)T}\mathbb{Q}\left(v_{1}<B_{T}<l,T\leq\zeta\right)-C_{1}xe^{-\psi_{3}T}\mathbb{E}\left[e^{\sigma B_{T}}I_{v_{1}<B_{T}<l,T\leq\zeta}\right]\\
&+C_{2}xe^{-\psi_{3}T}\mathbb{E}\left[e^{\sigma B_{T}}I_{l<B_{T}<v_{2},T\leq\zeta}\right]-C_{2}K_{2}e^{-(r+\lambda)T}\mathbb{Q}\left(l<B_{T}<v_{2},T\leq\zeta\right),
\end{aligned}
\tag{7.13}
$$

където

$$
\begin{aligned}
\psi_{1,i}&=(r+\lambda)-\left(r-\frac{\sigma^{2}}{2}\right)-\sigma c_{1,i}=\lambda+\frac{\sigma^{2}}{2}-\sigma c_{1,i}\\
\psi_{2,i}&=(r+\lambda)-\left(r-\frac{\sigma^{2}}{2}\right)-\sigma d_{1,i}=\lambda+\frac{\sigma^{2}}{2}-\sigma d_{1,i}\\
\psi_{3}&=\lambda+\frac{\sigma^{2}}{2}\\
l&=\frac{1}{\sigma}\ln\left(\frac{D_{0}}{x}\right)-\left(\frac{r}{\sigma}-\frac{\sigma}{2}\right)T\\
v_{1}&=\frac{1}{\sigma}\ln\left(\frac{D_{1}}{x}\right)-\left(\frac{r}{\sigma}-\frac{\sigma}{2}\right)T\\
v_{2}&=\frac{1}{\sigma}\ln\left(\frac{D_{2}}{x}\right)-\left(\frac{r}{\sigma}-\frac{\sigma}{2}\right)T.
\end{aligned}
\tag{7.14}
$$

Извличаме очакванията във формула (7.13), като използваме резултатите от Глава 2. Конструираме следния алгоритъм, за да апроксимираме оптималните граници:

1. Границите при падежа са $A_n = D_1$ и $B_n = D_2$.

2. Да предположим, че знаем всички стойности $A_m, A_{m+1}, ..., A_n$ и $B_m, B_{m+1}, ..., B_n$ за някое $m < n$.

3. Извеждаме пут-границата по следния начин. За константа $A < x$, нека $B\left(x, A\right)$ е стойността, която максимизира

$$
G\left(x;0,t_{m}-t_{m-1},...t_{n}-t_{m-1};A,A_{m},...,A_{n};B,B_{m},...,B_{n}\right)
\tag{7.15}
$$

измежду всички $B > x$. Да разгледаме уравнението (7.15) като функция на A и да означим с $A(x)$ аргументът, който максимизира

$$G\left(x; 0, t_m - t_{m-1}, ...t_n - t_{m-1}; A, A_m, ..., A_n; B\left(x, A\right), B_m, ..., B_n\right). \tag{7.16}$$

Нашето приближение за пут-границата A_{m-1} е най-голямото x, за което $x = A(x)$. Всъщност това е най-голямата първоначална стойност на базовия актив, за която незабавното упражняване като пут е оптимално.

4. Аналогично получаваме кол-границата. Нека за фиксирано $x < B$, $A(x, B)$ е стойността, която максимизира функция (7.15) спрямо променливата A. Освен това, нека $B(x)$ максимизира

$$G\left(x; 0, t_m - t_{m-1}, ...t_n - t_{m-1}; A\left(x, B\right), A_m, ..., A_n; B, B_m, ..., B_n\right) \tag{7.17}$$

измежду всички $B > x$.

5. Апроксимираме кол-границата B_{m-1} като най-малкото x, за което $x = B(x)$. Нашето приближение е най-малкото x, за което тази разлика е нула.

Да отбележим отново, че ако оптималните граници наистина са експоненти от по части линейни функции, то стойностите $A(x, B)$, $B(x)$, $B(x, A)$ и $A(x)$ не трябва да варират спрямо към x. Разбира се, това предположение е неоснователно – това мотивира алгоритъма по-горе.

След като знаем границите, можем да оценим стренгъл-комбинацията като решим съответното ЧДУ например чрез Кранк-Николсън метода на крайните разлики.

8 Квадратични Американски стренгъл-деривативи като частен случай на задачи водеши до първи изход от ивица.

Целта на тази глава е да разгледа някои финансови инструменти от американски тип, които водят до изход от ивица. Обръщаме специално внимание на подобни на стренгъл деривативи, но с квадратична платежна функция. Тези финансови инструменти са разгледани в светлината на много по-общи платежни-структури, които гарантират, че оптималната стратегия е изход от ивица. Необходимо условие за оператора (6.2), приложен към платежната функция $G(x)$, което води до такава задача е:

Съществуват консатнти $C \leq D$, такива че $(\mathcal{B}G)(x) < 0$ за $x < C$ и $x > D$, и $(\mathcal{B}G)(x) \geq 0$ за $x \in [C, D]$.

Съществуват две оптимални граници – $c(t) < d(t)$. Множеството за запазване е между тях. Оптималното множество се състои от две части – една под областта за запазване и друга над нея. Доказваме, че стойностите на оптималните граници при падежа са именно $c(0) = C$ и $d(0) = D$. След това получаваме стойностите при безкраен матуритет $c(\infty) = A$ и $d(\infty) = B$ като решение на следната система:

$$\begin{aligned} \left(\frac{A}{B}\right)^q &= \frac{G'(B)\,B - (p-q)\,G(B)}{G'(A)\,A - (p-q)\,G(A)} \\ \left(\frac{A}{B}\right)^{p-q} &= \frac{G'(A)\,A + qG(A)}{G'(B)\,B + qG(B)}. \end{aligned} \tag{8.1}$$

След това дефинираме така наречените квадратични стренгъли чрез платежна функция:

$$G(x) = (x-K)^2. \tag{8.2}$$

Първо, получаваме цената на съответния европейски дериватив

$$P(S_0) = S_0^2 e^{\left(r+\sigma^2-\lambda\right)T} - 2KS_0e^{-\lambda T} + K^2e^{-(r+\lambda)T}. \tag{8.3}$$

След това се разглеждаме инструменти от американски вид. Стойността на оператора $\mathcal{B}$, приложен към платежната функция, е

$$(\mathcal{B}G)(x) = x^2\left(r+\sigma^2-\lambda\right) + 2\lambda Kx - (r+\lambda)\,K^2. \tag{8.4}$$

Налага се да разгледаме по отделно случаите $\lambda > r+\sigma^2$ и $\lambda \leq r+\sigma^2$. Да допуснем, че $\lambda > r+\sigma^2$. Горното условие показва, че наистина имаме задача за излизане от ивица. Стойностите на C и D са

$$\{C, D\} = K\frac{\lambda \mp \sqrt{r^2+\sigma^2(r+\lambda)}}{\lambda - r - \sigma^2}. \tag{8.5}$$

Следната теорема дава стойностите когато няма матуритетни ограничения:

Theorem 8.1 (Theorem 1 of Zaevski (2024b))**.** *Нека $\overline{a}$ е решението на*

$$\begin{aligned} &\frac{(p-q-1)\left(1-a^{q+1}\right) - \sqrt{(p-q-1)^2\left(1-a^{q+1}\right)^2 - (p-q)(p-q-2)\left(1-a^q\right)\left(1-a^{q+2}\right)}}{(p-q)\left(1-a^q\right)} \\ &= a\frac{(q+1)\left(1-a^{p-q-1}\right) + \sqrt{(q+1)^2\left(1-a^{p-q-1}\right)^2 - q(q+2)\left(1-a^{p-q}\right)\left(1-a^{p-q-2}\right)}}{q\left(1-a^{p-q}\right)} \end{aligned} \tag{8.6}$$

в интервала $(0,1)$ и $\overline{x}$ се задава като

$$\overline{x} = \frac{(p-q-1)\left(1-\overline{a}^{q+1}\right) - \sqrt{(p-q-1)^2\left(1-\overline{a}^{q+1}\right)^2 - (p-q)(p-q-2)\left(1-\overline{a}^q\right)\left(1-\overline{a}^{q+2}\right)}}{(p-q)\left(1-\overline{a}^q\right)}. \tag{8.7}$$

Оптималните граници на квадратичната стренгъл стратегия са $\overline{A} = \frac{\overline{a}}{\overline{x}}K$ *и* $\overline{B} = \frac{K}{\overline{x}}$. *Цената е*

$$f\left(\overline{A}, \overline{B}; x\right) = \left(x - \overline{A}\right)^2 \left(\frac{\overline{A}}{x}\right)^q \frac{\overline{B}^p - x^p}{\overline{B}^p - \overline{A}^p} + \left(x - \overline{B}\right)^2 \left(\frac{\overline{B}}{x}\right)^q \frac{x^p - \overline{A}^p}{\overline{B}^p - \overline{A}^p}. \tag{8.8}$$

Засчата при краен падеж се изследва чрез подхода на глава 7. Ценообразуващата функция на инструмент, свързан с първия изход от ивица с по части линейни граници, е

$$\begin{aligned}
&F\left(x, T; c\left(t\right), d\left(t\right)\right) = \mathbb{E}^x\left[e^{-(r+\lambda)\zeta^A}\left(S_{\zeta^A} - K\right)^2 I_{\zeta^A = \zeta, \zeta < T}\right] \\
&+ \mathbb{E}^x\left[e^{-(r+\lambda)\zeta^B}\left(S_{\zeta^B} - K\right)^2 I_{\zeta^B = \zeta, \zeta < T}\right] + \mathbb{E}^x\left[e^{-(r+\lambda)T}\left(S_T - K\right)^2 I_{T \le \zeta}\right] \\
&= K^2 \sum_{i=1}^n \left(\mathbb{E}\left[e^{-(r+\lambda)\zeta^A} I_{\zeta \in (t_{i-1}, t_i], \zeta = \zeta^A}\right] + \mathbb{E}\left[e^{-(r+\lambda)\zeta^B} I_{\zeta \in (t_{i-1}, t_i], \zeta = \zeta^B}\right]\right) \\
&- 2Kx \sum_{i=1}^n \left(e^{\sigma a_{2,i}}\mathbb{E}\left[e^{-\psi_{1,i}\zeta^A} I_{\zeta \in (t_{i-1}, t_i], \zeta = \zeta^A}\right] + e^{\sigma b_{2,i}}\mathbb{E}\left[e^{-\psi_{2,i}\zeta^B} I_{\zeta \in (t_{i-1}, t_i], \zeta = \zeta^B}\right]\right) \\
&+ x^2 \sum_{i=1}^n \left(e^{2\sigma a_{2,i}}\mathbb{E}\left[e^{-\eta_{1,i}\zeta^A} I_{\zeta \in (t_{i-1}, t_i], \zeta = \zeta^A}\right] + e^{2\sigma b_{2,i}}\mathbb{E}\left[e^{-\eta_{2,i}\zeta^B} I_{\zeta \in (t_{i-1}, t_i], \zeta = \zeta^B}\right]\right) \\
&+ K^2 e^{-(r+\lambda)T}\mathbb{Q}\left(v_1 < B_T < v_2, T \le \zeta\right) - 2Kxe^{-\psi_3 T}\mathbb{E}\left[e^{\sigma B_T} I_{v_1 < B_T < v_2, T \le \zeta}\right] \\
&+ x^2 e^{-\psi_4 T}\mathbb{E}\left[e^{2\sigma B_T} I_{v_1 < B_T < v_2, T \le \zeta}\right],
\end{aligned} \tag{8.9}$$

където

$$\begin{aligned}
\psi_{1,i} &= (r+\lambda) - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) - \sigma a_{1,i} = \lambda + \frac{\sigma^2}{2} - \sigma a_{1,i} \\
\psi_{2,i} &= (r+\lambda) - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) - \sigma b_{1,i} = \lambda + \frac{\sigma^2}{2} - \sigma b_{1,i} \\
\eta_{1,i} &= (r+\lambda) - 2\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) - \sigma a_{1,i}\right) = \lambda + \sigma^2 - r - 2\sigma a_{1,i} \\
\eta_{2,i} &= (r+\lambda) - 2\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) - \sigma b_{1,i}\right) = \lambda + \sigma^2 - r - 2\sigma b_{1,i} \\
\psi_3 &= \lambda + \frac{\sigma^2}{2} \\
\psi_4 &= \lambda + \sigma^2 - r \\
v_1 &= \frac{1}{\sigma}\ln\left(\frac{C}{x}\right) - \left(\frac{r}{\sigma} - \frac{\sigma}{2}\right)T \\
v_2 &= \frac{1}{\sigma}\ln\left(\frac{D}{x}\right) - \left(\frac{r}{\sigma} - \frac{\sigma}{2}\right)T.
\end{aligned} \tag{8.10}$$

Очакванията в(8.9) могат да бъдат получени чрез резултатите от Глава 2. Да отбележим, че за някои стойности на параметрите трябва да използваме аналитичното продължение на erf-функцията.

И накрая, разглеждаме случая $\lambda \leq r+\sigma^2$. Оказва се, че имаме едностранна задача от пут-вид – тя е изучена в глава 6. Доказваме, че границата при падежа е

$$C = \frac{r+\lambda}{2\lambda}K \quad if\ \lambda = r+\sigma^2 \tag{8.11}$$

$$C = \frac{\sqrt{r^2+\sigma^2(r+\lambda)}-\lambda}{r+\sigma^2-\lambda}K \quad if\ \lambda < r+\sigma^2.. \tag{8.12}$$

Безматуритетната както и съответната цена се получват чрез следната теорема:

Theorem 8.2 (Theorem 2 of Zaevski (2024b))**.** *Ако $\lambda < r+\sigma^2$, то ранното упражняване никога не е оптимално. Цената е безкрайно голяма.*

Ако $\lambda = r+\sigma^2$, то всички точки под $\overline{A}$, зададено от

$$\overline{A} = \frac{q}{2(q+1)}K, \tag{8.13}$$

са оптимални. Цената е $(x-K)^2$, когато началната стойност на актива $S_0 = x$ е под $\overline{A}$ и се намира чрез

$$F\left(x;\overline{A}\right) = \frac{K^2\overline{A}^q - 2K\overline{A}^{q+1}}{x^q} + x^2, \tag{8.14}$$

когато $S_0 => \overline{A}$.

Желаните резултати за квадратичните стренгъл стратегии с краен падеж се получават чрез подхода от глава 6.

4.9-12. Отменяеми опции при липса на матуритетни ограничения

Ще обсъдим съвместно глави 8-12. Основната характеристика на отменяемите американски опции, също така известни като игрови или израелски, е съществуващото право на издателя да анулира договора преждевременно, като плати някаква неустойка. Тези опции са въведени от Kifer (2000). Някои по-късни важни изследвания са представени в Kifer (2000), Kyprianou (2004), Kühn and Kyprianou (2007), Suzuki and Sawaki (2007), Emmerling (2012) и Yam et al. (2014). Алтернативно, ние прилагаме нашия подход за максимизиране полезността за притежателя и издателя. Представяме основно Глава 12, защото тя обобщава резултатите от Глави 9-11. Въпреки това, доказателствата в Глава 12 се основават основно на Глави 9-11. Следователно яснотата на представянето налага наличието на тези глави.

Основната цел на тази глава е да представи и разгледа нов подклас от такива опции. Той затваря в някакъв смисъл множеството от отменяеми опции. Нека функцията $N_1(t,x)$ представя сумата, която издателят дължи, ако притежателят упражни опцията в момента t при спот цената $S_t = x$. Аналогично, функцията $N_2(t,x)$ дефинира сумата, която издателят трябва да плати, ако анулира договора. Да предположим, че неустойката се състои от три части – константата $\eta_1 \geq 1$ води до пропорция от обичайното плащане на опцията, $\eta_2 \geq 0$ е брой акциите от базовия актив и $\eta_3 \geq 0$ е фиксирана сума. Така функциите $N_1(t,x)$ и $N_2(t,x)$ се задават като

$$\begin{aligned} N_1(t,x) &= e^{-\lambda t}(x-K)^+ \\ N_2(t,x) &= e^{-\lambda t}\big(\eta_1(x-K)^+ + \eta_2 x + \eta_3\big) \end{aligned} \tag{8.15}$$

или

$$\begin{aligned} N_1(t,x) &= e^{-\lambda t}(K-x)^+ \\ N_2(t,x) &= e^{-\lambda t}\big(\eta_1(K-x)^+ + \eta_2 x + \eta_3\big). \end{aligned} \tag{8.16}$$

съответно за call- или put-опциите. Всъщност това е задача от областта на стохастичните игри – виж Dynkin (1969). Следователно, основната разлика между стренгълите и отменяемите опции е, че първите водят до задача за намиране на максимум на двумерен функционал върху пространството на случайните Марковски моменти, докато вторите се нуждаят от седлова точка. Нашият подход ни позволява да изследваме и двата класа финансови инструменти чрез подобни техники.

Можем да разделим пространството на състоянията на три части – оптимално за притежателя (Υ^b), оптимално за издателя (Υ^s) и множество за задържане (Υ). Ще означаваме ценовата функция с $V(t,x)$.

Налага се да наложим едно ограничение за оптималното множество на издателя в някои незначителни случаи, за да запазим общност на представянето: издателя не канселира опцията незабавно, дори ако това е оптимално за него, при положение, че някоя бъдеща стратегия осигурява същия резултат. Това предположение не е толкова ограничаващо от финансова гледна точка. Формулирано математически, то изглежда по следния начин:

Нека опцията е out-of-the-money, $\lambda = 0$, и $\eta_3 = 0$. Да допуснем, че $V(t,x) = N_2(t,x)$ и съществува стопинг тайм $\zeta > t$ п.с. такъв че $N_2(t,x) = M(t,x;\zeta,B(\zeta;x))$. Тогава $(t,x) \notin \Upsilon^s$.

Да разгледаме кол опциите. Доказваме следните твърдения, които характеризират оптималните граници:

1. Ако $x < K$, то $x \in \overline{\Upsilon}$.

2. Ако $\eta_3 \geq \eta_1 K$, то $\Upsilon^s = \emptyset$.

3. Да предположим, че по-голяма от цената на изпълнение константа x е оптимална за издателя, $x \in \Upsilon^s$. Нека y е друга константа, такава че $K < y < x$. Тогава $y \in \Upsilon^s$.

4. Ако $\eta_1 = 1$, $\eta_2 = 0$, и $\eta_3 = 0$, то $\overline{\Upsilon} = (0, K)$.

5. Ако $x \in \Upsilon^b$ и $y > x$, то $y \in \Upsilon^b$.

6. Ако $\lambda = 0$, то оптималното множество за държателя е празно.

7. Ако $r < 0$, то $\Upsilon^s \equiv \emptyset$ или $\Upsilon^s \equiv \{K\}$.

Тези твърдения показват, че оптималната областта на притежателя има формата $\Upsilon^b = [B, \infty)$ за някоя константа $B > K$, докато тази на издателя е интервал $\Upsilon^s = [K, A]$ (A е константа, по-малка от B, $K < A < B$), отделна точка $\Upsilon^s = \{K\}$, или празното множество $\Upsilon^s \equiv \emptyset$.

Нека x е началната стойност на базовия актив. За фиксирано B, означаваме $a = \frac{A}{B}$, $k = \frac{K}{B}$, $\xi = \frac{\eta_3}{B}$ и $y = \frac{x}{B}$. Доказваме, че уравнението

$$\begin{aligned} & a^{p+1} (\eta_1 + \eta_2) (p - q - 1) - a^p (\eta_1 k - \xi) (p - q) \\ & -a^{p-q} p (1 - k) + a (q + 1) (\eta_1 + \eta_2) - q (\eta_1 k - \xi) = 0 \end{aligned}$$

има единствено решение, което означаваме с $a(B)$. Аналогично, нека $b = \frac{B}{A}$, $k = \frac{K}{A}$, $\xi = \frac{\eta_3}{A}$ и $y = \frac{x}{A}$ за някоя фиксирана стойност на A. Доказваме, че уравнението

$$\begin{aligned} & -b^{p+1} (p - q - 1) + b^p k (p - q) \\ & +b^{p-q} p (\eta_1 + \eta_2 - \eta_1 k + \xi) - b (q + 1) + qk = 0 \end{aligned} \tag{8.17}$$

има точно един корен в интервала $(1, \infty)$ с изключение на граничния случай $\eta_2 = \eta_3 = 0$, разгледан в Глава 11. Означаваме този корен с $b(A)$. Нека $\overline{\eta}$ цената на обиновенна американска at-the-money опция:

$$\overline{\eta} = \frac{K}{\gamma} \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma} \right)^{\gamma - 1} \tag{8.18}$$

за $\gamma = p - q$. Доказваме следната теорема:

Theorem 12.1 (Theorem 3.8 of Zaevski (2023a))**.** *Нека $\lambda > 0$, $\eta_2 + \eta_3 > 0$, а истинските граници да означим с A^* и B^*.*

1. *Ако $\eta_3 \geq \eta_1 K$, то $\Upsilon^s = \emptyset$ и така опцията се превръща в обикновена американска – за повече подробности за тези опции виж глава 4.*

2. *Ако $\eta_3 < \eta_1 K$ в допълнение към $\eta_2 + \eta_3 > 0$, то $\overline{A}$ се дефинира като решение на уравнението $b(y)\, a(y b(y)) = 1$. В сила са следните твърдения:*

   (a) *Ако $\overline{A} \geq K$, то $A^* = \overline{A}$ и $B^* = \overline{A} b\left(\overline{A}\right)$. Множествата за упражняване са $\Upsilon^s = [K, A^*]$ и $\Upsilon^b = [B^*, \infty)$. Цената на опцията $V(x)$ се задава от:*

i. *формула*

$$V(x) = (\eta_2 K + \eta_3)\,\mathbb{E}^x\left[e^{-(r+\lambda)\tau} I_{\tau<\infty}\right] = (\eta_2 K + \eta_3)\left(\frac{x}{K}\right)^{\gamma} \tag{8.19}$$

когато $x \le K$*;*

ii. $V(x) = (\eta_1 + \eta_2)\,x - \eta_1 K + \eta_3$ *когато* $K < x < A^*$*;*

iii. $V(x) = x - K$ *когато* $x > B^*$*;*

iv. *формула*

$$V(x) = \\ ((\eta_1 + \eta_2)\,A^* - \eta_1 K + \eta_3)\left(\frac{A^*}{x}\right)^{q} \frac{B^{*p} - x^p}{B^{*p} - A^{*p}} + (B^* - K)\left(\frac{B^*}{x}\right)^{q} \frac{x^p - A^{*p}}{B^{*p} - A^{*p}} \tag{8.20}$$

когато $A^* \le x \le B^*$.

(б) *Ако* $\overline{A} < K$ *и* $\eta_2 K + \eta_3 \le \overline{\eta}$*,* $\overline{\eta}$ *е дефинирана чрез* (8.18)*, то* $A^* = K$ *и* $B^* = Kb(K)$*. Множествата за упражняване са* $\Upsilon^s = \{K\}$ *и* $\Upsilon^b = \left[\overline{B}, \infty\right)$*. Цената на опцията* $V(x)$ *се определя както в предишния случай.*

(в) *Ако* $\overline{A} < K$ *и* $\eta_2 K + \eta_3 > \overline{\eta}$*, то опцията отново е обикновена американска.*

Ако допълнителният дисконтов фактор е нула, ранното упражняване никога не е оптимално за притежателя. Доказваме следните резултати:

Theorem 12.2 (Theorem 3.9 of Zaevski (2023a))**.** *Нека* $\lambda = 0$.

1. *Да предположим, че* $M < K$ *– константата* M *е дефинирана като:*

$$M = \frac{2r\,(\eta_1 K - \eta_3)}{(\eta_1 + \eta_2 - 1)\,(2r + \sigma^2)}. \tag{8.21}$$

   (а) *Ако* $\eta_2 K + \eta_3 > K$*, то ранното упражняване никога не е оптимално и за двамата участници. Цената на опцията е* $V(x) = x$*.*

   (б) *Ако* $\eta_2 K + \eta_3 \le K$*, то зоната за упражняване на издателя е страйка. Цената се дава чрез*

   i. $V(x) = x + \left(\frac{K}{x}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}} (K(\eta_2 - 1) + \eta_3)$ *когато* $x \ge K$*.*

   ii. $V(x) = \frac{(\eta_2 K + \eta_3)x}{K}$ *когато* $x < K$*.*

2. *Ако* $M \ge K$*, то областта за упражняване на издателя е* $\Upsilon^s = [K, M]$*. Цената е*

   (а) $V(x) = \frac{(\eta_2 K + \eta_3)x}{K}$ *когато* $x < K$*;*

   (б) $V(x) = x\left(1 - \frac{\sigma^2(\eta_1 + \eta_2 - 1)}{2r}\left(\frac{2r(\eta_1 K - \eta_3)}{x(\eta_1 + \eta_2 - 1)(2r + \sigma^2)}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2} + 1}\right)$ *когато* $M < x$*;*

(в) $V(x) = (\eta_1 + \eta_2)x - \eta_1 K + \eta_3$ *когато* $K \le x \le M$.

Theorem 11.1 (Theorem 4.1 of Zaevski (2020a)). *Нека* $\eta_2 = \eta_3 = 0$ *и* $\lambda > 0$.

1. *Ако* $r > 0$, *то оптималните граници са* $A^* = \max\left(K, \overline{A}\right)$ *и* $B^* = A^* b(A^*)$. *Константата* $\overline{A}$ *е решението на уравнение* $b(A)\, a(Ab(A)) = 1$. *Цената се* V *намира чрез:*

   (а) *Ако* $x \le A^*$, *то* $V = \eta_1(x-K)^+$.

   (б) *Ако* $A^* < x < B^*$, *то*

$$V = \eta_1 (A^* - K)\left(\frac{A^*}{x}\right)^q \frac{B^{*p} - x^p}{B^{*p} - A^{*p}} + (B^* - K)\left(\frac{B^*}{x}\right)^q \frac{x^p - A^{*p}}{B^{*p} - A^{*p}}. \qquad (8.22)$$

   (в) *Ако* $B^* \le x$, *то* $V = x - K$.

2. *Ако* $r \le 0$, *то* $\Upsilon^s = (0, K]$ *и* $\Upsilon^b = (K, \infty)$. *Ако* $x \le K$, *то* $Y = 0$ *и* $Y = x - K$ *в противен случай.*

Нека обсъдим случая $\eta_2 = \eta_3 = 0$. *Всички точки под цената на изпълнение се считат за оптимални за издателя, тъй като той не дължи нищо. От друга страна, тези точки могат да се разглеждат и като принадлежащи към региона на задържане, тъй като стратегията за изчакване на първото достигане до цената на изпълнение дава същия резултат - можем да приложим наложеното по-горе условие.*

Нека да обсъдим пут-опциите. Доказани са следните твърдения

1. Ако $x > K$, то $x \in \overline{\Upsilon}$.
2. Ако $\eta_2 \ge \eta_1$, то $\Upsilon^s \equiv \emptyset$.
3. Ако $\eta_1 = 1$, $\eta_2 = 0$, и $\eta_3 = 0$, то $\overline{\Upsilon} = (K, \infty)$.
4. Ако $x \in \Upsilon^b$ и $y < x$, то $y \in \Upsilon^b$.
5. Ако $x < K$, $x \in \Upsilon^s$, и $x < y < K$, то $y \in \Upsilon^s$.
6. Ако $r > 0$, то $\Upsilon^s \equiv \emptyset$ или $\Upsilon^s \equiv \{K\}$.

Тези твърдения показват, че областта за упражняване на притежателя има формата $\Upsilon^b = (0, A]$ за някоя константа A, докато множеството на издателя има една от следните три форми – $\Upsilon^s = [B, K]$, $\Upsilon^s = \{K\}$ или $\Upsilon^s = \emptyset$. Дефинираме функциите $a(B)$ и $b(A)$ като корени на

$$
\begin{aligned}
&-a^{p+1}(p-q-1)+a^{p}k(p-q)-a^{p-q}p(\eta_1 k-\eta_1+\eta_2+\xi)-a(q+1)+qk=0\\
&b^{p+1}(p-q-1)(\eta_1-\eta_2)-b^{p}(\eta_1 k+\xi)(p-q)+\\
&+b^{p-q}p(k-1)+b(q+1)(\eta_1-\eta_2)-q(\eta_1 k+\xi)=0
\end{aligned}
\tag{8.23}
$$

Цената на at-the-money put-опция е

$$
\overline{\eta}=\frac{K}{q+1}\left(\frac{q}{q+1}\right)^{q}. \tag{8.24}
$$

Доказваме следната теорема за оптималните граници и цената на опцията:

Theorem 12.3 (Theorem 4.6 of Zaevski (2023a))**.** *Да допуснем, че $\eta_2+\eta_3>0$. Нека $\overline{B}$ е решението на уравнението $a(y)\,b(ya(y))=1$. Имаме следните случаи:*

1. *Ако $\eta_2\geq\eta_1$, то опцията е обикновена американска.*

2. *Да допуснем, че $\eta_2<\eta_1$ и $\eta_2+\eta_3>0$.*

   (а) *Ако $\overline{B}\leq K$, то $B^*=\overline{B}$ и $A^*=B^*a(B^*)$ – следователно областите за упражняване са $\Upsilon^s=[B^*,K]$ и $\Upsilon^b=[0,A^*)$. Цената на опцията $V(x)$ се дава от:*

   i. *$V(x)=(\eta_2K+\eta_3)\left(\frac{K}{x}\right)^q$ когато $x\geq K$;*

   ii. *от формула*

   $$
   \begin{aligned}
   &V(x)\\
   &=(K-A^*)\left(\frac{A^*}{x}\right)^q\frac{B^{*p}-x^p}{B^{*p}-A^{*p}}+(\eta_1K-(\eta_1-\eta_2)B^*+\eta_3)\left(\frac{B^*}{x}\right)^q\frac{x^p-A^{*p}}{B^{*p}-A^{*p}}.
   \end{aligned}
   $$

   когато $\overline{A}\leq x\leq\overline{B}$;

   iii. *от $V(x)=-(\eta_1-\eta_2)x+\eta_1K+\eta_3$ когато $\overline{B}<x<K$;*

   iv. *от $V(x)=K-x$ когато $x<\overline{A}$.*

   (б) *Ако $K<\overline{B}$ и $\eta_2K+\eta_3\leq\overline{\eta}$, то $B^*=K$ и $A^*=Ka(K)$. Множествата за упражняване са $\Upsilon^s=\{K\}$ и $\Upsilon^b=\left(0,\overline{A}\right]$. Цената на опцията се определя както в предишния случай.*

   (в) *Ако $K<\overline{B}$ и $\eta_2K+\eta_3>\overline{\eta}$, то опцията е обикновена американска.*

Theorem 11.3 (Theorem 6.1 of Zaevski (2020a))**.** *Да допуснем, че $\eta_2=\eta_3=0$.*

1. *Ако $r\geq0$, то областите за упражняване са $\Upsilon^s=[K,\infty)$ и $\Upsilon^b=(0,K)$. Ако $x<K$, то цената е $V=K-x$. В противен случай тя е нула.*

2. *Ако $r < 0$, то областите за упражняване са $\Upsilon^s = [B^*, \infty)$ и $\Upsilon^b = (0, A^*)$, където $B^* = \min\left(\overline{B}, K\right)$ и $A^* = B^* a(B)$. Стойността на $\overline{B}$ се получава като решение на уравнението $1 = a(B)\, b(Ba(B))$. Така цената на опцията е*

   (а) *$V = K - x$, ако $x < A^*$;*

   (б) *$V = (A^* - K)\left(\frac{A^*}{x}\right)^q \frac{B^{*p} - x^p}{B^{*p} - A^{*p}} + \eta (B^* - K)\left(\frac{B^*}{x}\right)^q \frac{x^p - A^{*p}}{B^{*p} - A^{*p}}$, ако $x \in [A^*, B^*)$;*

   (в) *$V = \eta(K - x)^+$, ако $B^* \leq x$.*

Ако $\eta_2 = \eta_3 = 0$, то всички точки над цената на изпълнение се считат за оптимални за издателя, но те могат да се разглеждат и като част от множеството за задържане, тъй като изчакването на първото достигане до страайка осигурява същия финансов резултат.

4.13. Оценяване на отменяеми Американски пут опции върху краен времеви интервал.

Да разглеждаме отменими пут опции с краен падеж и с постоянна неустойка, т.е. $\eta_1 = 1$, $\eta_2 = 0$ и $\eta_3 = \eta > 0$. Специална роля в нашето разглеждане има един подклас на американските деривативо. Притежателят им има право да упражни във всеки момент преди падежа, получавайки обичайното опционно плащане. В допълнение, ако базовият актив достигне страйка, когато оставащото време до падежа е по-голямо от някаква предварително определена стойност τ, дериватившът изтича, като изплаща някаква сума η. Ще наречем този дериватив (τ, η)-американска опция. Очевидно, ако времето до падежа е по-малко от τ, тогава (τ, η)-американската опция съвпада с обикновената.

Имаме две критични стойности за времето до падежа. Първата, τ_1, прави цената на обичайната американска at-the-money-опция равна на неустойката:

$$V^{am}(K; \tau_1) = \eta. \tag{8.25}$$

Характеризирането на втората, τ_2, е по-сложно – правим това числено. Доказваме следната теорема:

Theorem 13.1 (Theorem 3.1 of Zaevski (2022b))**.** *Границата за упражняване на притежателя е намаляваща функция, започваща от точката*

$$\min\left(\frac{r + \lambda}{\lambda}, 1\right) K. \tag{8.26}$$

Формата на границата на издателя е по-сложна. Нека B е стойноста при безкраен матуритет, ако тя съществува. Следните твърдения характеризират границата:

1. *Ако B не съществува, еквивалентно на $\eta \geq \overline{\eta}$ за $\overline{\eta}$, дадено в уравнение (8.25), то $\tau_1 = \tau_2 = \infty$ и $\Upsilon^s \equiv \emptyset$.*

2. *Ако $B = K$, то $\tau_1 < \infty$, но $\tau_2 = \infty$. Освен това $\Upsilon^s_\tau \equiv \emptyset$ за $\tau \leq \tau_1$ и $\Upsilon^s_\tau \equiv \{K\}$ в противен случай. Да обърнем внимание, че това е случаят, когато $r \geq 0$.*

3. *Ако $B < K$, то $\tau_1 < \tau_2 < \infty$. Така границата на издателя не съществува за $\tau < \tau_1$, тя съвпада с цената на изпълнение за $\tau \in (\tau_1, \tau_2)$, и е намаляваща клоняща към B функция за $\tau \geq \tau_2$.*

По този начин опцията е обикновена американска, когато $\tau \in (0, \tau_1]$, тя е (τ_1, η)-американска за $\tau \in (\tau_1, \tau_2)$ и реална отменяема опция за $\tau \in [\tau_2, \infty)$.

Първо трябва да разберем кой случай на теорема 13.1 е валиден. Ако неустойката е по-голяма от критичната стойност $\overline{\eta}$, дадена във формула (8.25), то опцията е обикновена американска. Да предположим, че $\eta < \overline{\eta}$. Можем да изчислим границата на издателя при безкраен матуритет, B, като използваме резултатите от Глава 10. Тя може да бъде равна или по-малка от страйка.

Следващата стъпка е да разделим времевия интервала $n \geq 2$-подинтервали, $0 \equiv t_0 < t_1 < ... < t_n \equiv T \equiv \tau$. Можем да приемем, че $\tau_1 < \tau$, защото в обратния случай опцията е обикновена Американска. Налагаме две изисквания – τ_1 да бъде възел на мрежата и разделянето да е относително равномерно. За целта използваме следната процедура. Първо, разделяме интервала на две части – $(0, \tau_1)$ и (τ_1, τ). След това разделяме равномерно двата интервала съответно на m_1 и m_2 части, така че $m_1 + m_2 = n$ и

$$m_1 = \min\left(\max\left(1, Round\left(\frac{\tau_1}{\tau}n\right)\right), n-1\right). \tag{8.27}$$

Използвахме по-горе обозначението $Round\,(x)$ за най-близкото до x цяло число. Формулировката (8.27) гарантира, че $m_1 \geq 1$ и $m_2 \geq 1$, т.е. има поне един подинтервал преди τ_1, както и след него. Също така да отбележим, че $t_{m_1} = \tau_1$.

Трябва да модифицираме подхода за апроксимиране на оптималните граници, вземайки предвид техните особености. Първо, дефинираме следните деривативи в европейски тип за някои функции $0 < a\,(t) < b\,(t)$. Те изтичат на датата на падежа или когато базовият актив излезе от ивицата $(a\,(t)\,, b\,(t))$. Дериватите плащат сума $N_1\,(t, a\,(t))$ или $N_2\,(t, b\,(t))$ ако излизането се случи съответно от долната или горната граница. Ще назовем тези производни $(a\,(t)\,, b\,(t))$-европейски опции. Тяхната цената може да се получи като

$$\begin{aligned}
&G\,(x, T; a\,(t)\,, b\,(t)) = \mathbb{E}^x\left[e^{-(r+\lambda)(\zeta_1\wedge T)}(K - S_{\zeta_1\wedge T})^+ I_{(\zeta_1\wedge T)\leq\zeta_2}\right] \\
&+ \mathbb{E}^x\left[e^{-(r+\lambda)\zeta_2}\left((K - S_{\zeta_2})^+ + \eta\right) I_{\zeta_2<(\zeta_1\wedge T)}\right] \\
&= K\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left[e^{-(r+\lambda)\zeta_1} I_{\zeta\in(t_{i-1},t_i],\zeta=\zeta_1}\right] - x\sum_{i=1}^{n} e^{\sigma c_{2,i}}\mathbb{E}\left[e^{-\psi_{1,i}\zeta_1} I_{\zeta\in(t_{i-1},t_i],\zeta=\zeta_1}\right] \\
&+ (K+\eta)\sum_{i=1}^{m_1}\mathbb{E}\left[e^{-(r+\lambda)\zeta_2} I_{\zeta\in(t_{i-1},t_i],\zeta=\zeta_2}\right] - x\sum_{i=1}^{m_1} e^{\sigma d_{2,i}}\mathbb{E}\left[e^{-\psi_{2,i}\zeta_2} I_{\zeta\in(t_{i-1},t_i],\zeta=\zeta_2}\right] \\
&+ Ke^{-(r+\lambda)T}\mathbb{Q}\,(B_T < k, T \leq \zeta) - xe^{-\psi_3 T}\mathbb{E}\left[e^{\sigma B_T} I_{B_T<k,T\leq\zeta}\right],
\end{aligned} \tag{8.28}$$

където

$$
\begin{aligned}
\psi_{1,i} &= (r+\lambda) - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) - \sigma c_{1,i} = \lambda + \frac{\sigma^2}{2} - \sigma c_{1,i} \\
\psi_{2,i} &= (r+\lambda) - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) - \sigma d_{1,i} = \lambda + \frac{\sigma^2}{2} - \sigma d_{1,i} \\
\psi_3 &= \lambda + \frac{\sigma^2}{2} \\
k &= \frac{1}{\sigma} \ln\left(\frac{K}{x}\right) - \left(\frac{r}{\sigma} - \frac{\sigma}{2}\right) T.
\end{aligned}
\tag{8.29}
$$

Както споменахме по-горе, отменяемите опции водят до задача за намиране на седлова точка. Така че можем да използваме алгоритъм, подобен на представения за обикновените американски опции или за стренгълите. Основната разлика е, че трябва да минимизираме резултата за границата на издателя – долната.

След като апроксимираме оптималните граници, можем да намерим цената на опцията много прецизно чрез схемата на крайните разлики на Кранк-Николсън. Първо, да предположим, че първоначалната цена на актива е между оптималните граници. Предлагаме в допълнение един Монте Карло метод, базиран на някои резултати на Wang and Pötzelberger (1997) и Pötzelberger and Wang (2001).

1. Генерираме $n-1$ нормално разпределени случайни числа, които образуват вектор $\overline{u}$.

2. Нека $m \leq n$ и векторът u се състои от първите $m-1$ елементи на $\overline{u}$. Нека D е $(m-1)\times(m-1)$-диагонална матрица с елементи $\sqrt{\Delta t_i/n}$. Трябва да имаме предвид, че дължината на интервалите, Δt_i, се различава преди и след момента $T-\tau_1$. Изчисляваме вектора x като $x = MDu$, където M е $(m-1)\times(m-1)$-долна триъгълна матрица с единични стойности.

3. Ако $t_{m-1} < T-\tau_1$, то намираме стойности v:

$$
v = v\left(x_1, ..., x_{m-1}\right) = \prod_{i=1}^{m-1} I_{c_i<x_i<d_i} \left(1 - \sum_{j=1}^{\infty} q_{ij}\left(x_{i-1}, x_i\right)\right). \tag{8.30}
$$

Обратно, ако $m_1 \leq m-1$, то v се намира като

$$
\begin{aligned}
v = v\left(x_1, ..., x_{m-1}\right) &= \prod_{i=1}^{p-1} I_{c_i<x_i<d_i} \left(1 - \sum_{j=1}^{\infty} q_{ij}\left(x_{i-1}, x_i\right)\right) \\
&\times \prod_{i=p}^{m-1} I_{c_i<x_i} \left(1 - \exp\left(-\frac{2\left(c_{i-1}-x_{i-1}\right)\left(c_i - x_i\right)}{\Delta t_i}\right)\right).
\end{aligned}
\tag{8.31}
$$

4. Извеждаме стойностите w като $w = e^{-\xi t_{m-1}} L_{1,2}(\cdot)$, използвайки резултатите от Глава 2.4.

5. Изчисляваме произведението $P = vw$.

6. Повтаряме тази процедура H пъти и след осредняване намираме необходимите очаквания като $\frac{1}{H}\sum_{i=1}^{H} P_i$.

Ако първоначалната цена на актива е над страйка, то имаме следната формула в полузатворена вид:

$$
\begin{aligned}
V(\tau, S_0) &= \mathbb{E}\left[e^{-(r+\lambda)\zeta}\eta I_{\zeta \le T-\tau_1}\right] \\
&+ e^{-r(T-\tau_1)} \int_d^{\infty} e^{-\lambda(T-\tau_1)} V_{am}\left(\tau_1, S_0 e^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-\tau_1)+\sigma y}\right) d\mathbb{Q}\left(B_{T-\tau_1} < y, \zeta > T-\tau_1\right) \\
&= \eta e^{-a_2\left(\sqrt{a_1^2+2(r+\lambda)}+a_1\right)} g\left(T-\tau_1, -\sqrt{a_1^2+2(r+\lambda)}, a_2\right) \\
&+ e^{-(r+\lambda)(T-\tau_1)} \int_d^{\infty} V_{am}\left(\tau_1, S_0 e^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-\tau_1)+\sigma y}\right) f(y; T-\tau_1)\, dy,
\end{aligned}
\tag{8.32}
$$

където

$$
\begin{aligned}
a_1 &= -\frac{r}{\sigma} + \frac{\sigma}{2} \\
a_2 &= -\frac{\ln S_0 - \ln K}{\sigma} \\
d &= a_1(T-\tau_1) + a_2 \\
f(y;t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\left(1 - \exp\left(-\frac{2a_2(a_1 t + a_2 - y)}{t}\right)\right)\exp\left(-\frac{y^2}{2t}\right) \\
g(T; b_1, b_2) &= N\left(\frac{b_1 T + b_2}{\sqrt{T}}\right) + \exp(-2b_1 b_2) N\left(\frac{-b_1 T + b_2}{\sqrt{T}}\right).
\end{aligned}
\tag{8.33}
$$

4.14. Някои програми в среда MATLAB

Изведените в предходните глави теоретични резултати са имплементирани с помощта на MATLAB. Предоставяме някои от най-важните кодове - общият им брой надхвърля двеста. Всички те са налични и могат да бъдат предоставени при поискване. Да отбележим, че те не са професионално изготвени, а са по-скоро за лична употреба. Обсъждаме и някои специфики на използваните алгоритми.

Литература

Martin Beibel and Hans Rudolf Lerche. A new look at optimal stopping problems related to mathematical finance. *Statistica Sinica*, 7(1):93–108, 1997.

F. Black and M. Scholes. The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 81(3):637–659, 1973.

M. Broadie and J. Detemple. American capped call options on dividend-paying assets. *The Review of Financial Studies*, 8(1):161–191, 1995.

P. Carr, R. Jarrow, and R. Myneni. Alternative characterizations of American put options. *Mathematical Finance*, 2(2):87–106, 1992. ISSN 1467-9965. doi: 10.1111/j.1467-9965.1992.tb00040.x. URL http://dx.doi.org/10.1111/j.1467-9965.1992.tb00040.x.

J. Detemple and W. Tian. The valuation of American options for a class of diffusion processes. *Management Science*, 48(7):917–937, 2002.

E.B. Dynkin. A game-theoretic version of an optimal stopping problem. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 185(1):16–19, 1969. in Russian.

T.J. Emmerling. Perpetual cancellable American call option. *Mathematical Finance: An International Journal of Mathematics, Statistics and Financial Economics*, 22(4):645–666, 2012.

S. D. Jacka. Optimal stopping and the American put. *Mathematical Finance*, 1(2):1–14, 1991. ISSN 1467-9965. doi: 10.1111/j.1467-9965.1991.tb00007.x. URL http://dx.doi.org/10.1111/j.1467-9965.1991.tb00007.x.

J. Jeon and J. Oh. Valuation of American strangle option: Variational inequality approach. *Discrete & Continuous Dynamical Systems-B*, 24(2):755, 2019.

Y. Kifer. Game options. *Finance and Stochastics*, 4(4):443–463, Aug 2000. ISSN 0949-2984. doi: 10.1007/PL00013527. URL https://doi.org/10.1007/PL00013527.

I.J. Kim. The analytic valuation of American options. *The Review of Financial Studies*, 3(4):547–572, 1990. ISSN 08939454, 14657368. URL http://www.jstor.org/stable/2962115.

C. Kühn and A.E. Kyprianou. Callable puts as composite exotic options. *Mathematical Finance*, 17(4):487–502, 2007.

A.E. Kyprianou. Some calculations for Israeli options. *Finance and Stochastics*, 8(1):73–86, 2004.

K. Pötzelberger and L. Wang. Boundary crossing probability for Brownian motion. *Journal of Applied Probability*, 38(1):152–164, 2001.

S. Qiu. American strangle options. *Applied Mathematical Finance*, 27(3):228–263, 2020.

A. N. Shiryaev. *Essentials of stochastic finance: facts, models, theory*, volume 3. World scientific, 1999.

A.N. Shiryaev, Y.M. Kabanov, D.O. Kramkov, and A.V. Mel'nikov. Toward the theory of pricing of options of both European and American types. II. continuous time. *Theory of Probability & Its Applications*, 39(1):61–102, 1995.

A. Suzuki and K. Sawaki. The pricing of perpetual game put options and optimal boundaries. In *Recent Advances in Stochastic Operations Research*, pages 175–187. World Scientific, 2007.

L. Wang and K. Pötzelberger. Boundary crossing probability for Brownian motion and general boundaries. *Journal of Applied Probability*, 34(1):54–65, 1997.

S.C.P. Yam, S.P. Yung, and W. Zhou. Game call options revisited. *Mathematical Finance*, 24(1):173–206, 2014.

T. Zaevski. Perpetual cancellable American options with convertible features. *Modern Stochastics: Theory and Applications*, 10(4):367–395, 2023a. ISSN 2351-6046 (print), 2351-6054 (online). doi: 10.15559/23-VMSTA230. URL https://www.vmsta.org/journal/VMSTA/article/273/read.

T. Zaevski. American strangle options with arbitrary strikes. *Journal of Futures Markets*, 43(7):880–903, 2023b. ISSN 0270-7314 (print), 1096-9934 (online). doi: https://doi.org/10.1002/fut.22419. URL https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/fut.22419.

T. Zaevski. Some limits for the Laplace transform of the Brownian motionвЂ™s first hit to a linear function. *Serdica Mathematical Journal*, 50(2):183вЂ“202, 2024a. ISSN 1310-6600 (print), 2815-5297 (online). doi: 10.55630/serdica.2024.50.183-202. URL https://serdica.math.bas.bg/index.php/serdica/article/view/87.

T. Zaevski. Quadratic American strangle options in light of two-sided optimal stopping problems. *Mathematics*, 12(10):1449, 2024b. ISSN 2227-7390. doi: 10.3390/math12101449. URL https://www.mdpi.com/2227-7390/12/10/1449.

T.S. Zaevski. Perpetual game options with a multiplied penalty. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 85:105248, 2020a. ISSN 1007-5704 (print), 1878-7274 (online). doi: https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2020.105248. URL http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1007570420300812.

T.S. Zaevski. Discounted perpetual game put options. *Chaos, Solitons & Fractals*, 137:109858, 2020b. ISSN 0960-0779 (print), 1873-2887 (online). doi: https://doi.org/10.1016/j.chaos.2020.109858. URL http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0960077920302587.

T.S. Zaevski. Laplace transforms for the first hitting time of a Brownian motion. *Comptes rendus de l'Académie bulgare des Sciences*, 73(7):934–941, 2020c. ISSN 2367-6248 (print),2603-4832 (online). doi: 10.7546/CRABS.2020.07.05. URL http://www.proceedings.bas.bg/index_old.html.

T.S. Zaevski. Pricing discounted American capped options. *Chaos, Solitons & Fractals*, 156:111833, 2022a. ISSN 1007-5704 (print), 1878-7274 (online). doi: https://doi.org/10.1016/j.chaos.2022.111833. URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0960077922000443.

T.S. Zaevski. Pricing cancellable American put options on the finite time horizon. *Journal of Futures Markets*, 42(7):1284–1303, 2022b. ISSN 0270-7314 (print), 1096-9934 (online). doi: https://doi.org/10.1002/fut.22331. URL https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/fut.22331.

T.S. Zaevski. On some generalized American style derivatives. *Computational and Applied Mathematics*, 43(3):115, 2024c. ISSN 2238-3603 (print), 1807-0302 (online). doi: https://doi.org/10.1007/s40314-024-02625-6. URL https://link.springer.com/article/10.1007/s40314-024-02625-6.